重力シート多体系の進化とその解析[1]

土屋俊夫
京都大学理学部宇宙物理学教室 *(tsuchiya@kusastro.kyoto-u.ac.jp)*

I. INTRODUCTION

重力多体系とは重力だけで相互作用する粒子の多体系である。太陽系から球状星団、銀河、銀河団など、宇宙における様々な天体がこの重力多体系としてモデル化することができる。これらの天体は基本的には同じ物理過程に従って進化しているが、球形に近く、等方な速度分布を持っている球状星団から、ひしゃげた形をしており非等方な速度分布を持つ楕円銀河まで、実際の天体の形はずいぶんバラバラである。この違いは主に、粒子数の違いと、観測した時の系の年齢によっている。宇宙年齢が 10^{10} 年であるのに対して、球状星団の力学的な進化の起こるタイムスケールは約 10^9 年だが、楕円銀河では 10^{17} 年と、宇宙年齢よりも遥かに長い。従って常に進化の途中の非平衡状態を見ているからである。

重力多体系の進化を理解する上で重要な要素として、各々の粒子の運動を決めている微視的物理過程と、系全体の巨視的な状態の変化の 2 つがある。微視的な運動はカオスであり、それを正確に決めることは一般には難しいが、幸運な場合には、局所平衡という概念によって微視的状態を統計的に扱えることがある。しかし重力多体系の場合にはこの局所平衡は成り立たない。なぜなら、重力はスケールを持たない長距離力であるため、同時にすべての粒子と相互作用し、その結果各粒子は系全体と同じ広がりを持って運動するからである。そのため、重力多体系では微視的な運動状態 (即ちカオス) が直接巨視的な振舞に影響を与える。このことが、単純な物理過程しか持たない重力多体系に大きな多様性をもたらしている。

微視的な運動状態をできるだけ正確に追いながら、広いタイムスケールのレンジにわたる進化を調べるためには、できるだけ単純なモデルが望ましい。上記の重力多体系の性質は、重力の長距離相互作用、及び大域的結合という 2 つの特徴が本質的であると思われるが、この性質を保ちながら、最も単純化したモデルとして 1 次元重力シート系で研究を行った。そこで得られた幾つかの新しい結果について報告する。

II. 1 次元重力シート多体系

モデルは、無限に広がった一様な N 枚のシートが、それに垂直な方向にのみ運動するようなものを考える。それぞれのシートのもつ自由度は 1 次元なので、これを 1 次元重力シート多体系 (または 1 次元重力多体系) と呼んでいる。それぞれのシートは互いの重力に従って運動し、シートの交差が起こった時には、互いにすり抜けると考える。各シートの位置と速度を x_i、v_i、シートの面密度を m とすると、この系のハミルトニアンは

$$H = \frac{m}{2}\sum_{i}^{N} v_i^2 + \left(2\pi G m^2\right)\sum_{i\neq j}^{N} |x_i - x_j| \tag{1}$$

と書くことができる。無限に広がった一様なシートの作る重力は距離によらず一定になる。1 枚のシートの受ける力はそのシートの右と左にあるシートの数の差で決まり、シートの交差が起こるまでは運動は放物的になる。従って実際のシミュレーションでは微分方程式を解く必要がなく区分的に解析的な解をつないでいくことで進化を追うことができる。これが 3 次元系にはない 1 次元系のメリットであり、高精度で高速なシミュレーションが可能となる。このシート系も 3 次元系と同様に、2 体では運動は規則的であるが、3 体以上になると運動はカオスになる。系の保存量は全エネルギーと全運動量の 2 つだけである。

この系の平衡状態として、これまでに動力学的平衡状態と熱力学的平衡状態の 2 つが知られていた。動力学的平衡 (以後略して力学平衡) 状態は、重力の長距離力という性質から現れるもので、前に述べたように粒子数が大きくなると、各々の粒子にかかる力は平均場からの寄与が卓越する。この時個々の粒子による散乱の影響は無視できるので、これを無衝突的と呼ぶが、この状態で定常的な平均場ポテンシャル中を規則的に運動する粒子の集まりとして力学平衡状態が定義される。この平衡状態では、個々の粒子のエネルギーなどは保存されるが、逆に、平均場からのずれの効果 (離散的な粒子分布の影響など) によって粒子間でのエネルギーの交換が十分進み、エントロピーが最大になった状態として定義されるのが、熱力学的平衡 (以後略して熱平衡) 状態である。

初期に非平衡にある系は、まず動力学的な進化を経験する。もし系全体の重力エネルギーが運動エネルギーよりも十分大きければ、系は収縮をはじめ、逆ならば膨張する。重力エネルギーと運動エネルギーがほぼつりあったところ (正確には運動エネルギーの 2 倍と重力エネルギーが等しい) で、系は力学平衡に達する。時間の単位として、1 つの粒子が系の端から端までを横切るのにかかる時間 (これを動力学的時間 t_c と呼ぶ) で計ると、力学平衡に達するまでにかかる時間はほぼ数倍の t_c である。その後しばらく力学平衡の状態に留まるが、長い時間の後には無衝突の近似が破れてきて粒子間でのエネルギーの交換が起こるようになる。このエネルギー変化のタイムスケールよりも遥かに長いタイムスケールで系の進化を平均して見ると、系は熱平衡にあると観測される。

III. 進化の解析

平衡状態へ至る過程が緩和であるが、これは力学系の言葉で言えばエルゴード性の実現である。しかしエルゴード性を直接示すのは難しい。そこで、いろいろな物理量の測定、解析を行ってそこから間接的に緩和を判断することになる。我々が行った解析は次の通りである。

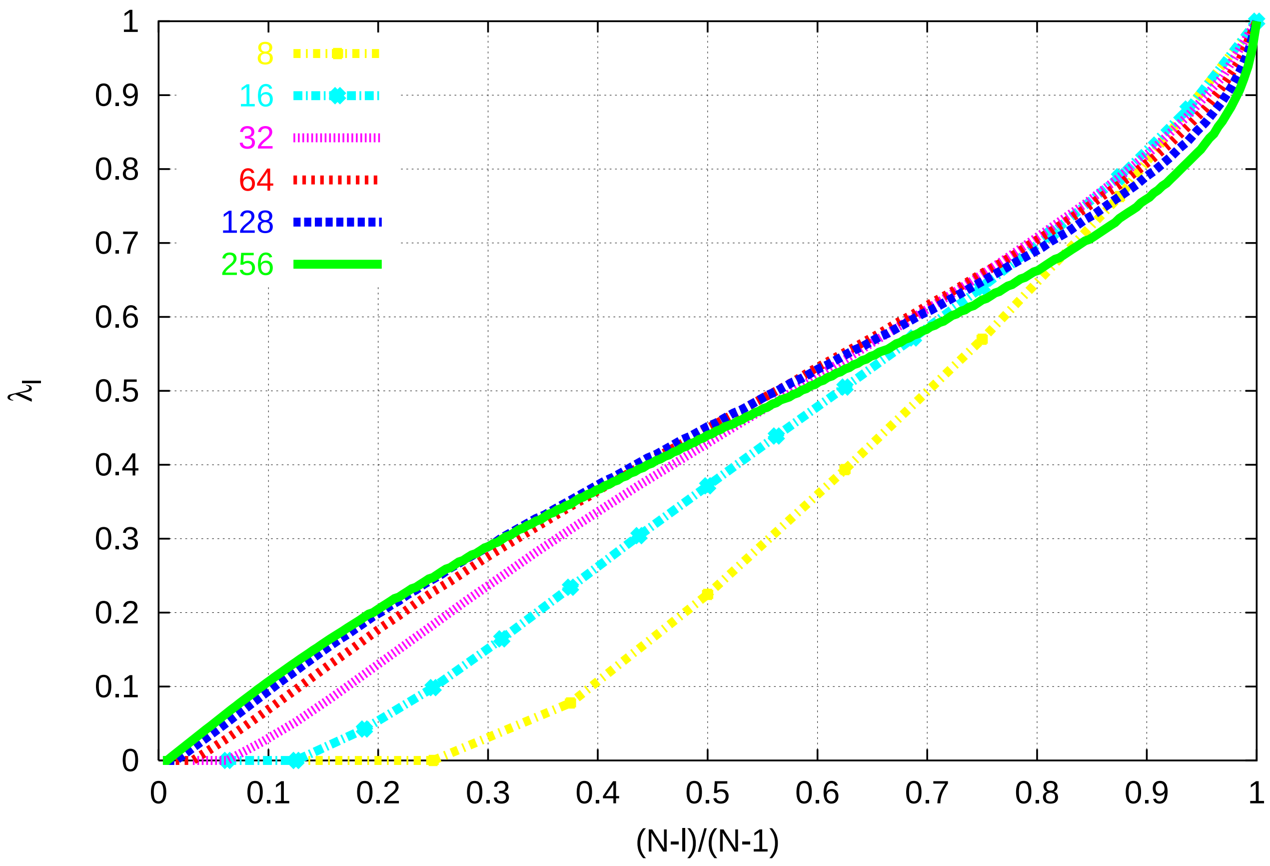

FIG. 1. Spectrum of the positive Lyapunov exponents for various N. The index of the Lyapunov exponents is scaled to 0 to 1.0. The vertical axis shows the Lyapunov exponents normalized by the value of the maximum Lyapunov exponent.

A. 巨視的分布の変化

1粒子分布関数が、動力学的平衡状態から、熱力学的平衡状態の分布へ変化する時間を調べる。この時間は確率的な分布をするが、water-bag と呼ばれる初期条件から出発すると、それが変化を始める時間は $4 \times 10^4 N t_c$ となる。

B. エネルギー等分配からのずれ

1粒子のエネルギー ε_i $(i = 1, \ldots, N)$ は、数値計算から時間の関数として与えられる。系が無衝突的である間は $\varepsilon_i(t)$ は定数であるが、更に時間が経つとエネルギーは変化を始める。系がエルゴード的だと仮定すると、このエネルギー揺らぎの長時間平均は粒子によらず、ある一定の値 ε_0 に近づく。そこで、このエネルギー等分配からのずれを次の量で特徴づける。

$$\Delta(t) \equiv \varepsilon_0^{-1} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\overline{\varepsilon_i}(t) - \varepsilon_0\right]^2}, \tag{2}$$

但し $\overline{\varepsilon_i}(t)$ は $\varepsilon_i(t)$ を時間について 0 から t まで平均したものである。もし系が緩和する時間よりも長い時間でこの平均をとれば、$\varepsilon_i(t)$ の時間変化は熱的な揺らぎとみなすことができる。この時 $\Delta(t)$ は $t^{-1/2}$ で減衰するはずである。

$\Delta(t)$ の時間変化の中で特徴的な変化は $N t_c$ 及び $4 \times 10^4 N t_c$ で起こる。

C. Power Spectrum Density

1粒子エネルギーの揺らぎの質を見るため、全粒子で平均した power spectrum density(PSD) を調べた。

$$S(f) \equiv (1/N) \sum_{i=1}^{N} |C_i(f)|^2, \tag{3}$$

但し

$$\varepsilon_i(t) = \int C_i(f) \exp[-2\pi f t] df \tag{4}$$

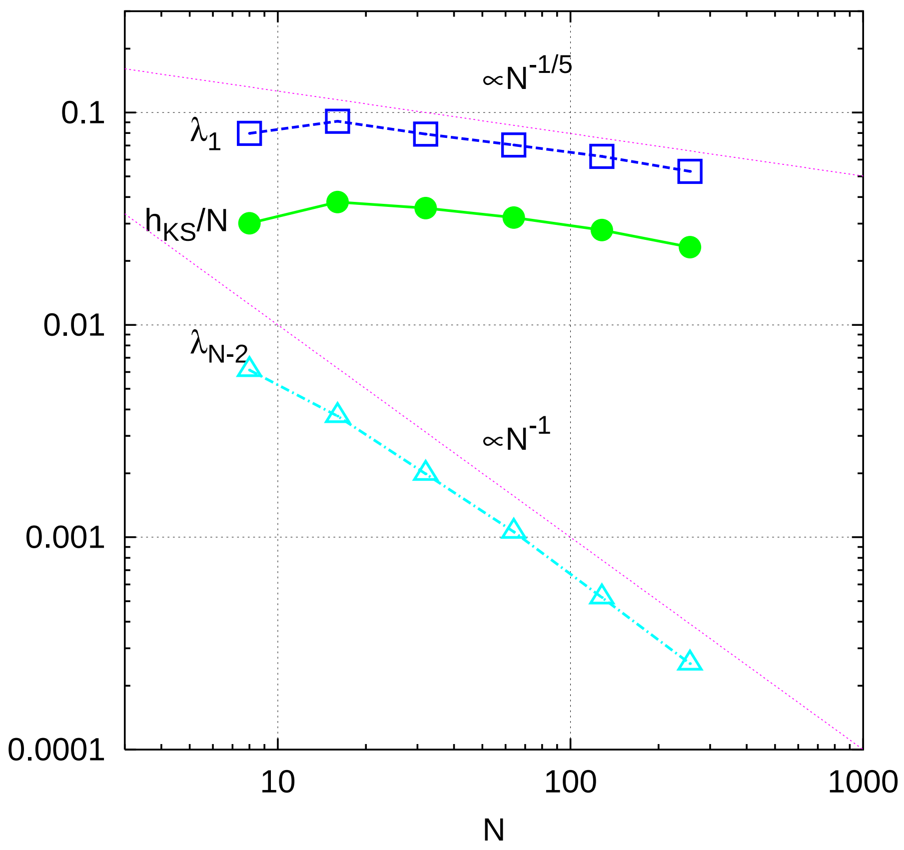

FIG. 2. Dependence of the KS entropy (solid line with the symbol ●), the maximum Lyapunov exponent (long dashed curve with the symbol □), and the minimum positive Lyapunov exponent (dashed dotted curve with the symbol △).

この PSD は、振動数の大きなところでは f^{-2} の拡散的な巾指数を持つが、$N = 128$ で $f \sim 10^{-3}$ 程度で折れ曲がりがあり、それより小さな f では $1/f$ 的な巾を持つ。

IV. LYAPUNOV 数による解析

Lyapunov 数は位相空間中の微少な 2 点間の距離

$$d(t) \equiv \sqrt{\sum_{j=1}^{N}(\Delta x_i^2(t) + \Delta v_i^2(t))} \tag{5}$$

の指数的増大率として定義される。我々は式 (1) を線形化した方程式

$$\Delta\dot{x}_i = \Delta v_i, \tag{6}$$

$$\Delta\dot{v}_i = -4\pi Gm\sum_{j=1}^{N}(\Delta x_i - \Delta x_j) \tag{7}$$

を用いて解き、Shimada and Nagashima(1979) の方法を用いて Lyapunov 数 λ_i $(i = 1, 2N)$ を計算した。Lyapunov 数の本来の定義は無限大の時間での平均であるが、数値的にはそれは不可能であるので、系の進化を時間的に積分していくのに応じて、その積分した時間までで平均を取った量

$$\lambda(t) = \frac{1}{t}\ln\frac{d(t)}{d(0)} \tag{8}$$

を見ることにする。

A. Lyapunov 数の収束

まず、初期条件として water-bag 分布から出発した系では $t = 10^3 t_c (N = 128$ の場合) 程度で最大 Lyapunov 数は収束する。しかしここでの収束値はより長い時間を取った熱平衡状態での収束値とは違っており、$\lambda_1(t)$ は $t = 10^6 t_c$ を越えたあたりから再び変化し始め、熱平衡状態での収束値へ近づいていく。一般の初期条件から始めたものは、$t =$

$10^6 Nt_c$ ほどの積分時間で、 $\lambda_i(t)$ の揺らぎが $1/10,000$ 程度にまで収束する。

B. Lyapunov spectrum

Figure 1はいろいろな N での Lyapunov spectrum を表している。横軸は正の Lyapunov 数を右側から小さい順に並べており、縦軸は各 N について λ_1 の値が 1 になるように規格化している。この図では、 N が大きくなるにつれてスペクトルの形が収束しているように見えるが、細かく見ると、 $N = 32$ を越えると逆 S 字の歪みが広がっているのがわかる。スペクトルの収束性については更に大きな N による実験が必要だが今のところこれ以上大きな N についてスペクトルを求めるのは難しい。

C. Lyapunov 数の粒子数依存性

Figure 2は最大 Lyapunov 数 λ_1、正の最小の Lyapunov 数 λ_{N-2} 及び 1 粒子あたりの Kolmogorov-Sinai エントロピー h_{KS}/N の N 依存性を表している。ここで、 KS エントロピーは正の Lyapunov 数の総和として計算した。

$$h_{KS} = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \tag{9}$$

これを見ると、最大 Lyapunov 数は $N^{-1/5}$、最小 Lyapunov 数はほぼ N^{-1} で変化していることがわかる。 Lyapunov スペクトルの形が N によって大きく変っていないことを反映して 1 粒子あたりの KS エントロピーも $N^{-1/5}$ という振る舞いをする。ここで特筆したいのは、 KS エントロピーは mixing のタイムスケールを特徴づけるものとされているが、ここで計算された KS エントロピーの逆数から決まる時間はとても短いもので、系の「緩和」とは全く関係ない時間となっている。このことについては研究会で議論したい。

D. Lyapunov vectors

Figure 3は最大 Lyapunov 数、及び最小 Lyapunov 数に対応する固有モードを表す微少変位ベクトルのある時刻でのスナップショットである。最大 Lyapunov 数に対応するモードでは中心付近の極少数 (4 程度) の粒子の大きな変位を表しているのに対して、最小 Lyapunov 数に対応するモードではほぼ全ての粒子のランダムな方向への変位を表している。この最小 Lyapunov 数についてはその逆数のタイムスケールが、 1 粒子のエネルギーの mixing が起こる時間とほぼ等しく、また Lyapunov vector が示す変位の性質から、系の mixin を特徴づける不安定性が小さな Lyapunov 数として現れていると推測される。

V. まとめ

以上述べてきた幾つかの解析結果を総合して、この系の進化、緩和のもっともらしい描像を推測することが目的である。結果を見てくると、この重力シート系はとても奇妙な振る舞いをしているように見える。まとめと解釈については敢えてここでは書かず、研究会で自由な意見を聞かせていただければ幸いである。

---

[1] この研究は郷田直輝氏 (現国立天文台) および小西哲郎氏 (名古屋大) との共同研究である。

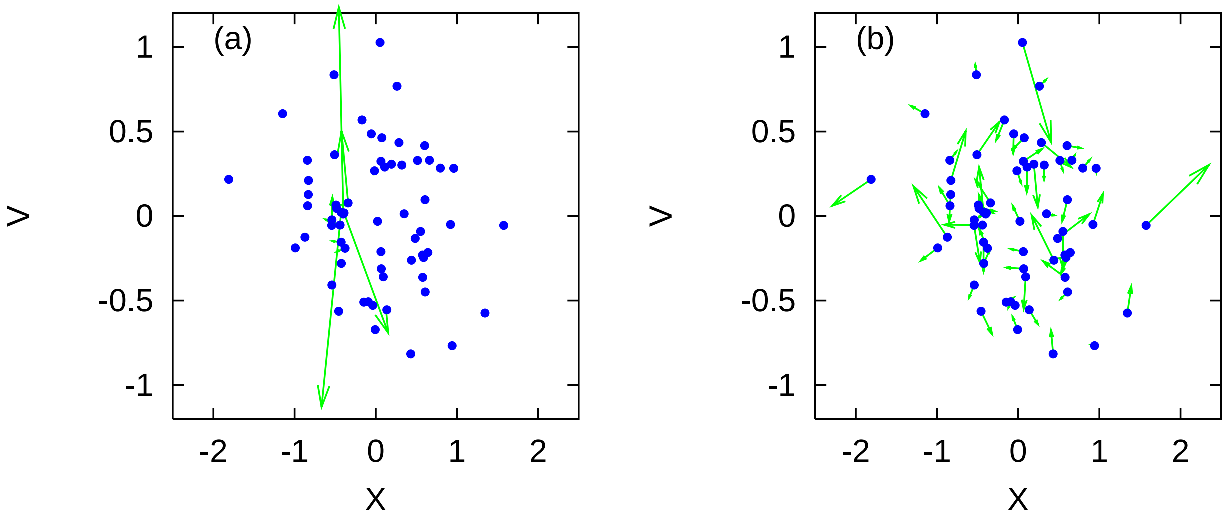

FIG. 3. Lyapunov vectors for $N = 64$. Filled circles indicate positions of N sheets and the arrows give direction of the Lyapunov vector: (a) the Lyapunov vector for λ_1, (b) that for λ_{N-2}.