多自由度力学系における 横断リアプ ノフ指数の揺らぎ と 間欠性 [1]

鹿児島大 理学部 物理科学科 秦　浩起[2]
(e-mail : hata@sci.kagoshima-u.ac.jp)

高次元力学系が相対的に低次元の不変多様体 M を持つ時, M の安定性は最大横断リアプ ノフ指数 $\Lambda_\perp$ で記述される。$0 < \Lambda_\perp \ll 1$ の場合, 軌道は不変多様体の近傍での長時間滞留を繰り返すオンオフ間欠性を示すことがある。この間欠性の機構と性質および間欠性が引き起こす幾つかの運動について具体例を掲げて紹介する。移流開放系, ハミルトン系の横断リアプ ノフ解析の可能性も考察したい。

1　横断リアプ ノフ指数とオンオフ間欠性

N 次元力学系 (とりあえず散逸系)

$$\dot{X} = F(X) \tag{1}$$

を考える。この時, ある $n(< N)$ 次元多様体 M に対し

$$X(0) \in \mathrm{M} \Rightarrow X(t) \in \mathrm{M}, (t > 0) \tag{2}$$

であるとき, M を (1) の不変多様体と呼ぶ。この時, M 上の初期点から得られる軌道は「M 上でのアトラクター」$\mathrm{A}^{(\mathrm{M})}$ を形成する。今後, $\mathrm{A}^{(\mathrm{M})}$ を形成する軌道を $X^{(\mathrm{M})}(t)$ と書く。

$\mathrm{A}^{(\mathrm{M})}$ が N 次元空間内での真のアトラクターであるためには, M に対し横断方向の安定性を議論する必要がある。それには $X^{(\mathrm{M})}(t)$ の近接軌道 $X(t) = X^{(\mathrm{M})}(t) + \delta X(t), |\delta X(t)| \ll 1$ の振る舞いを見ればよい。この時, ずれ $\delta X(t)$ は, $F(X)$ のヤコビ行列 $J(X)$ を用いた

$$\delta\dot{X}(t) = J(X^{(\mathrm{M})}(t))\delta X(t) \tag{3}$$

に従う。[3] これより各点 $X^{(\mathrm{M})}(t)$ において N 個の基底 $E_i(X^{(\mathrm{M})}(t)), (i = 1, 2, ...N)$ とその方向の軌道拡大率 Λ_i が決まる。[4] (但し, $\Lambda_i \geq \Lambda_{i+1}$ と順番付けする。) これら N 個の基底のうち n 個は M に平行なので, M の横断方向の振る舞いは残りの $N - n$ 個の基底に対応する指数 (横断リアプ ノフ指数) で決まる。その最大のものが最大横断リアプ ノフ指数 $\Lambda_\perp$ で $\mathrm{A}^{(\mathrm{M})}$ は, $\Lambda_\perp < 0$ であればアトラクターで, $\Lambda_\perp > 0$ であれば「サドル」である。

さて, 一般に制御パラメターの変化で $\Lambda_\perp$ が負から正に変化することがあり, これは不変多様体 M の不安定化といえる。この時, 近接軌道 $X(t)$ は $\tau_* = 1/\Lambda_\perp$ 程度の時間で M から離れるが, 1 度離れた軌道が M 近傍に再投入されるような大域的機構があれば, M 近傍を繰り返し訪れるカオス軌道が系のアトラクターとなり, サドル $\mathrm{A}^{(\mathrm{M})}$ は重要な役目を果たす。

特に不安定化直後においては $0 < \Lambda_\perp \ll 1$ なので, [5] 軌道が M 近傍に長時間停留し離れるという間欠的運動を示す。更に, リアプ ノフ指数が時間的な和のプロセスであることに留意するとわ

---

[1] ワークショップ「リアプ ノフ解析の逆襲」(名大) にて 1999.07.27

[2] この話の一部と関係する共同研究者：高田芳和 (鹿大 理工 D2), 原田智洋 (京大 情報 D2), 宮崎修次 (京大 情報), 藤坂博一 (京大 情報)

[3] $\delta X(t)$ は n 次元多様体上のカオス $X^{(\mathrm{M})}(t)$ に駆動される形になっている。

[4] $\mathrm{A}^{(\mathrm{M})}$ が N 次元空間でのアトラクターであれば Λ_i はリアプ ノフ指数である。

[5] 一般に $\Lambda_\perp$ はパラメター空間における転移点からの距離 ϵ に対し $\Lambda_\perp \sim \epsilon$ と振る舞う。

かるように, [6] 有限時間での横断リアプノフ指数の時間的揺らぎが重要になり, [7] 以下のような特徴ある間欠性 (オンオフ間欠性) を示す。

1. 不変多様体からの距離 $d(t)$ のサイズ分布がベキ分布となり, その指数は横断リアプノフ指数とその時間的揺らぎで決まる。

$$P_d(d) = \overline{\delta(d - d(t))} \sim d^{-1+\eta}, \quad \eta \equiv \Lambda_\perp/\sigma \tag{4}$$

   但し, $\overline{\cdots}$ は長時間平均とする。
2. 適当に小さな敷居値 d_* を設定し $d(t) < d_*$ をラミナーと定義したとき, ラミナー継続時間 τ の分布が指数-1.5 のベキ分布となる。($d_* \ll 1$ の値には依存しない。)

$$P_\tau(\tau) = \overline{\delta(\tau - \tau_i)} \sim \tau^{-1.5}, \quad \tau_i\text{は } i \text{ 番目のラミナーの継続時間} \tag{5}$$

3. $d(t)$ のパワースペクトル $P(\omega)$ が次のスケーリング則を示す。

$$S(\omega) = \tilde{S}(\omega/\omega_c), \quad \omega_c = 2\pi/\tau_c, \quad \tau_c = \sigma/\Lambda_\perp^2, \quad \tilde{S}(\omega) \sim \begin{cases} const, & \omega \ll \omega_c \\ \omega^{-0.5}, & \omega \gg \omega_c \end{cases} \tag{6}$$

等を示す。[8]

オンオフ間欠性の最も簡単な具体的モデルは, カオス運動を 2 つ結合させたものである。例えばロジスティック写像 $x_{t+1} = f(x_t) = a - x_t^2$ を大きさ c で結合させた

$$x_{t+1}^{(1)} = (1-c)f(x_t^{(1)}) + cf(x_t^{(2)}), \quad x_{t+1}^{(2)} = (1-c)f(x_t^{(2)}) + cf(x_t^{(1)}) \tag{7}$$

[9] は, $a = 1.9, c = 0.205$ において図 1 のようなアトラクターを構成し, 不変多様体 $x^{(1)} = x^{(2)}$ からの距離は図 2 のような間欠性を示す。図 3 はサイズ分布, 図 4 は敷居値 $d_* = 0.05$ 以下をラミナーとしたときのラミナー継続時間 τ の分布である。

このように N 次元力学系が n 次元の不変多様体を持っているとき, 不変多様体近傍を繰り返し訪れ, 不変多様体近傍で上述の長いラミナー運動 (継続時間分布はベキ分布) を示すのがオンオフ間欠性である。

2 オンオフ間欠性による運動

オンオフ間欠性によって引き起こされる運動は色々あるが, ここでは興味深い運動を幾つか紹介する。

2.1 オンオフ拡散

2 次元周期ポテンシャル $U(x, y)$ 中での散逸系粒子に x 軸方向のみに周期外力がかかった時の運動方程式は, 時刻 t での粒子の位置を $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$, 外力の強度と角振動数を f, Ω, 減衰定

[6] スペースがないので式で書くのは講演にて

[7] カオスのリアプノフ指数 Λ は一般に有限時間において揺らぎを示し一定の分布 (軌道拡大率のスペクトル) を持つ。だが, その揺らぎが表舞台に立つことは多くはない。それは揺らぎの大きさ σ に対し平均値 Λ が小さくないからである。

[8] これらは, 何れも $d(t)$ の運動を次のように簡単化したモデルより導出できる。
$(1)t$ を離散化し, $d(t) = d_t$ とする。$(2)\hat{d}_t = \ln d_t$ を $0, -1, -2, ... = x_0, x_1, x_2, ...$ といった格子点上に限定し, 各時刻において確率 $(1 \pm \epsilon)/2$ で ± 1 だけ増減する酔歩とする。$(3)\hat{d}_t = 0$ に至ると $\exp x_j$ に比例して格子点 x_j に再投入される。($d(t)$ の意味でランダムで均一な再投入である。)

[9] この場合は 1 次元写像のリアプノフ指数 $\Lambda_\parallel$ と横断リアプノフ指数は $\Lambda_\perp = \ln(1-2c) + \Lambda_\parallel$ という関係になる。

数を $\gamma > 0$ として

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\gamma\dot{\mathbf{x}} - \nabla U(\mathbf{x}) + f\sin(\Omega t)\mathbf{e}_x, \quad U(x,y) = -(a/\pi)\cos^2(\pi x)\cos(\pi y) \tag{8}$$

で与えられる。

5 次元 $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \theta = \Omega t)$ 相空間中において, $y = 0, \dot{y} = 0$ の 3 次元多様体 M_0 が (8) の不変多様体であることはわかるが, 更に, 系の対称性により同等な多様体 M_n が $y = n, (n = \pm 1, \pm 2, ...)$ に並んでいることもわかる。ここで $\gamma = 0.06, a = 1.6, \Omega = 1.0$ に固定し外力の大きさ f を 4.1 に取ると, M_n 上の横断リアプノフ指数 $\Lambda_\perp$ は負で軌道は $x = n$ 上でのカオスを示す。そこから f を下げていくと, $\Lambda_\perp > 0$ になり y 方向にも運動が発生する。この転移点近傍では, 軌道が不変多様体近傍に長く停留し y 方向に離れ, 再び他の不変多様体に停留し... を繰り返す間欠的運動を示すことになる (図参照)。この y 方向の拡散をオンオフ拡散と呼ぶ。

このように相空間中に複数の不変多様体が存在し, それが横断的に弱く不安定化すると, 多様体間を間欠的に飛び移る運動が見られる。この時, 運動を支配する多様体近傍の停留はオンオフ間欠性によって理解される。

2.2 カオス的遍歴

カオス運動を示す要素系が結合した大域結合写像系

$$x_{t+1}^{(i)} = f(x_t^{(i)}) + c(< f(x_t^{(i)}) > - f(x_t^{(i)})), \quad i = 1, 2, ..., N \tag{9}$$

を考えよう。ここで $x^{(i)}$ は各要素の状態変数, 写像 $f(x) = a - x^2$ は要素のダイナミクス, c は結合の強さ, $< \cdots >$ は集団平均である。

この系は, 全要素が一様 $x^{(1)} = x^{(2)} = \cdots = x^{(N)}$ である 1 次元不変多様体, 2 グループ $x^{(1)} = \cdots = x^{(n)}, x^{(n+1)} = \cdots = x^{(N)}$ に分かれた 2 次元不変多様体... というように数々の不変多様体を持つ。これらの不変多様体が弱く不安定化すると, 間欠的に, 異なった不変多様体近傍間を飛び移る運動が見える。この飛び移りはグループを構成する要素の組み合わせが変わるマクロな変動でカオス的遍歴の 1 つである。

この運動は §2.1 の飛び移り運動と似た側面を持つが, 互いに異なった次元の不変多様体が混在し, 含む含まれる等の構造を持ち, ダイナミクスをより複雑で多様なものにしている。図には $N = 5$ の系において, 2 次元多様体が不安定化した状況での 1 次元多様体および $15(= 2^4 - 1)$ 個の 2 次元多様体近傍間の乗り移り運動が示されている。[10]

3 更なる展開?

上流から下流へ至るような移流系では, リアプノフ指数を拡張した流れ着きリアプノフ指数 $\Lambda(v)$ で不安定性を議論できる。同様に 1 次元移流系の結合系の同調現象は, 流れ着き横断リアプノフ指数 $\Lambda_\perp(v)$ で捉えられそうである。ここでも $0 < \Lambda_\perp(v) \ll 1$ となると間欠性が発生する。このような時空カオス系で上述したような間欠性が起こると, 空間構造にも特徴ある振る舞いが形成される。

[10] このような系では自由度 N が増加すると, 不変多様体の不安定化点がパラメター空間の幅を持った領域でぎっしりと並ぶ状況が出現し, 至る所で間欠性が起きていると思われる。

§2.2 を見ると, ハミルトン系でも同様な運動が発生しないかと期待される。[11] 例えば, N 個の回転子が大域的に相互作用するハミルトニアン

$$H = \sum_{i=1}^{N} \{p^{(i)}\}^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} [k \cos(2\pi x^{(i)}) + c \sum_{j} \cos\{2\pi (x^{(j)} - x^{(i)})\}] \delta(t-n) \qquad (10)$$

に従う系 ($N = 1$ では標準写像) は, 確かに §2.2 と同様の不変多様体を持つ。しかし, 散逸がないので $\Lambda_\perp < 0$ とはなり得ず, 不変多様体近傍の軌道を引きつけることはない。従って, 低次元不変多様体の不安定化による軌道の高次元化という転移はなく, §1 と同じオンオフ間欠性はなさそうである。だが, 横断方向の軌道拡大率が 0 近傍で揺らぐ可能性はあり, 横断リアプノフ指数による解析は何らかの意味をなすかもしれない。実際, 不変多様体上のカオス軌道について $\Lambda_\perp > 0$ だが, 有限時間の軌道拡大率が長時間に渡って 0 近傍で揺らぐ場合がある。(これが系の運動に何らかの間欠性を生み出しているかは調査中！)

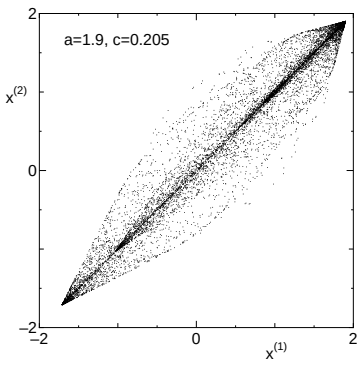

図 1: 結合写像系 (2 個) の相空間。$x^{(1)} = x^{(2)}$ が不変多様体

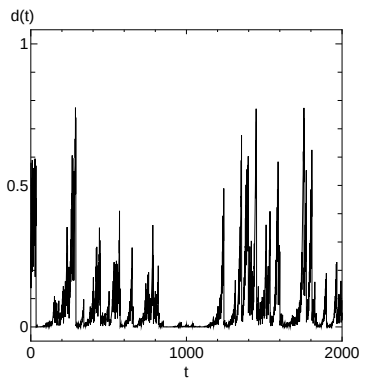

図 2: 不変多様体からの距離の時系列 $d(t)$

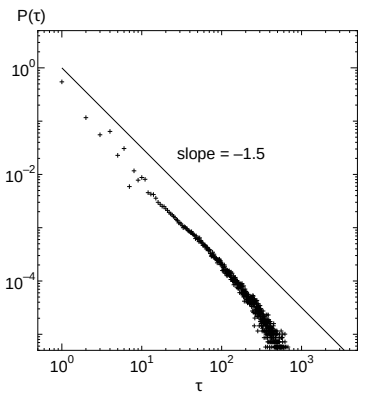

図 3: ラミナー継続時間の分布

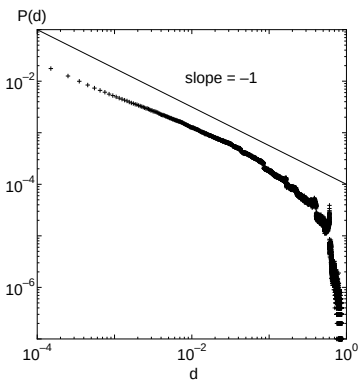

図 4: 距離 d の分布

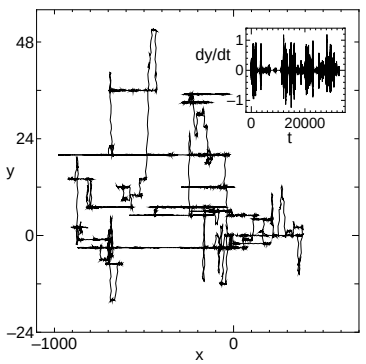

図 5: オンオフ拡散の (x, y) 空間での軌道。内挿図は y 方向の速度 $\dot{y}$ の時系列

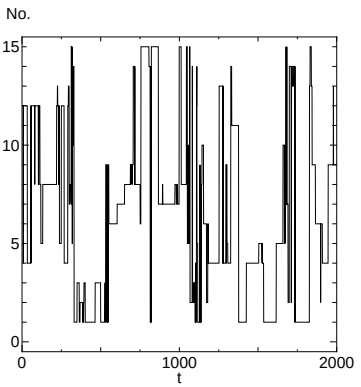

図 6: 不変多様体間の飛び移り運動。縦軸は不変多様体 16 個に付けた番号

[11] 山口義幸 氏 (京大情報) との議論がきっかけの 1 つになっています。