「微分積分学続論 II–微分方程式 」講義ノート

担当　柴山允瑠

目次

第 1 章 序論 7
1.1 常微分方程式の例 7
1.2 常微分方程式の種類 11
1.3 微分方程式を簡単にする方法 14
1.4 微分方程式の一般解と特殊解 15
1.5 微分方程式を解くということ 17

第 2 章 1 階単独常微分方程式 19
2.1 変数分離形 19
2.2 同次形 21
2.3 線形微分方程式 23
2.4 完全微分方程式 25
2.5 注意 30

第 3 章 線形微分方程式 31
3.1 連立定数係数線形微分方程式 31
3.2 高階単独線形常微分方程式 38
3.3 連立線形方程式の相図 46
3.4 非線形方程式の平衡点近傍の線形近似 47
3.5 変数係数線形微分方程式 49
3.6 非斉次方程式 52

第 4 章 常微分方程式の基本定理 59
4.1 解の存在と一意性 59
4.2 初期値に関する依存性 66
4.3 パラメータを持つ微分方程式 68
4.4 解析的微分方程式 69

付録 A 原始関数の計算 71

はじめに

講義の内容

本講義では，常微分方程式の解法について学ぶ．下に参考文献を挙げる．基礎的なものから高度なものへの順に並べている．本講義では，[2] 程度の内容を習得することを目指す．

[1] 溝畑茂，数学解析 上，第 4 章，1973 年
[2] 柳田英二, 栄伸一郎, 常微分方程式論, 朝倉書店, 2002 年
[3] 矢ヶ崎一幸，微分方程式の基礎と解法, 学術図書出版社, 2014 年
[4] V. I. アーノルド，常微分方程式 (足立，今西訳)，現代数学社，1981 年
[5] 坂井秀隆，常微分方程式，東京大学出版会，2015 年

第 1 章

序論

1.1　常微分方程式の例

求めるべき未知関数に関する情報が, 未知関数とその導関数の関係式により与えられているものを微分方程式という．例えば, 振り子の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin x$$

や熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

などである.

振り子の方程式のように, 未知関数が 1 つの独立変数 (この場合 t) をもつとき, その微分方程式を常微分方程式という．熱伝導方程式のように, 未知関数が 2 つ以上の独立変数 (この場合 t と x) をもつとき, その微分方程式を偏微分方程式という．本講義の対象は常微分方程式であるので，常微分方程式を単に微分方程式と呼ぶこともある．常微分方程式は様々な分野で現れることを知るために，いくつか例を挙げよう．

例 1.1. 放射性物質の崩壊現象を考える．$u(t)$ を時間 t における放射性物質の質量とすると，$u(t)$ は

$$\frac{du}{dt} = -ku$$

を満たす．ここで，k は正の定数である．

この方程式は容易に解ける．ある時間 $t = t_0$ における放射性物質の量を $u = u_0 > 0$ とする．すなわち，$u(t_0) = u_0$. 少なくとも t_0 に近い t では u は 0 でないので，そのような範囲で考えることにす

る．方程式の両辺を u で割って，t_0 から t まで積分して計算してみる:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u}\frac{du}{dt} &= -k \\
\int_{t_0}^{t} \frac{1}{u}\frac{du}{dt}dt &= \int_{t_0}^{t} -kdt \\
\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{u}du &= -k(t-t_0) \\
[\log|u|]_{u_0}^{u(t)} &= -k(t-t_0) \\
\log|u(t)| - \log|u_0| &= -k(t-t_0) \\
\log\left|\frac{u(t)}{u_0}\right| &= -k(t-t_0) \\
\frac{u(t)}{u_0} &= \pm e^{-k(t-t_0)} \\
u(t) &= \pm u_0 e^{-k(t-t_0)}
\end{aligned}$$

$u(t_0) = u_0$ なので

$$u(t) = u_0 e^{-k(t-t_0)}$$

である．初期値を使わずに全ての解を表示するには，C を任意の定数として

$$u(t) = Ce^{-kt}$$

とすればよい．

例 1.2. 食物がいくらでもある状況での生物個体数のモデルを考える．時間を t とし生体個体数を u とすると．u の増大速度は u に比例するから常微分方程式

$$\frac{du}{dt} = au$$

を満たす．a は正定数である．前と同様にして，初期値が $u(t_0) = u_0$ だとすると解は

$$u(t) = u_0 e^{a(t-t_0)}$$

と解ける．

食物が一定の場合の生物個体数の変化を考える．そのようなモデルとして，

$$\frac{du}{dt} = (a-bu)u \tag{1.1}$$

が考えられる．これは，

$$\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = \frac{a}{u} - b$$

となり

$$-\frac{1}{a}\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{u} - b\right) = \frac{a}{u} - b$$

と表せて，$v = \frac{a}{u} - b$ とおくとこれは

$$\frac{dv}{dt} = -av$$

となるので，$v = v_0 e^{-a(t-t_0)}$ を満たす．よって，

$$u = \frac{ae^{a(t-t_0)}}{v_0 + be^{a(t-t_0)}} = \frac{au_0 e^{a(t-t_0)}}{a - bu_0 + bu_0 e^{a(t-t_0)}}$$

となる．ここで，$u_0 = u(t_0)$ である．

捕食者と被食者がいる生態系を考えよう．被食者数を u，捕食者数を v とする．例えば，u をある草食動物，v をそれを食べる肉食動物としよう．u の食料 *(草)* は十分にあるとすると，この例の最初のモデルと同じく，u の増大度には u に比例する項がある．しかし，肉食動物に出会うと食べられるが，その割合は uv に比例して減少する．v は uv に比例して増大するが，それ以外に食べ物がないとすると，自然死により v に比例して減少する．以上を考慮すると，*Lotka-Volterra* 方程式と呼ばれる u, v の方程式

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= (A - Bv)u \\ \frac{dv}{dt} &= (Cu - D)v\end{aligned}$$

が得られる．A, B, C, D は全て正の定数である．

ここで，関数

$$H(u, v) = Cu - D\log u + Bv - A\log v$$

を考える．これに *Lotka-Volterra* 方程式の解を代入したものを微分してみる．

$$\begin{aligned}\frac{dH(u(t), v(t))}{dt} &= C\dot{u} - D\frac{\dot{u}}{u} + B\dot{v} - A\frac{\dot{v}}{v} \\ &= C(A - Bv)u - D\frac{(A - Bv)u}{u} + B(Cu - D)v - A\frac{(Cu - D)v}{v} \\ &= C(A - Bv)u - D(A - Bv) + B(Cu - D)v - A(Cu - D) \\ &= ACu - BCvu - AD + BDv + BCuv - BDv - ACu + AD \\ &= 0\end{aligned}$$

つまり，$H(u(t), v(t))$ は一定である．

H を u, v の関数と見たとき，H は $(u, v) = (\frac{D}{C}, \frac{A}{B})$ を非退化な最小値をもつ．その周りの等高線は閉曲線になる．つまり，$(u(t), v(t))$ は周期的に振る舞う．これは，食物連鎖を簡単なモデルでみたといえよう．

$H(u, v)$ ように，各解に沿って一定の値となる関数を保存量とか第一積分という．このように，保存量により微分方程式を解くことができる場合もあるが，一般に保存量が存在するかどうかを明確にすることは困難であるし，存在したとしてもそれを求めることは難しい．*Lotka-Volterra* 方程式に対して保存量 H を導出する方法は全微分方程式の節で述べる．

例 1.3. *Newton* の運動方程式に基づくと質点の運動は「質量 × 加速度=力」に従う．方程式で表すと，

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = F$$

である．例えば，振り子の運動方程式は

$$ml\frac{d^2q}{dt^2} = -mg\sin q$$

すなわち，

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin q \tag{1.2}$$

と表される．ここで，m は質点の質量，l は棒の長さ，g は重力加速度である．

この場合，

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - \frac{g}{l}\cos q$$

が解に沿って一定であることが，前の例と同様にしてわかる．この場合もこの保存量のおかげで解はよく分かる．

振り子の支点を振動させた場合の運動方程式は

$$\frac{d^2q}{dt^2} = (-\frac{g}{l} + \varepsilon\cos\nu t)\sin q$$

になる．こうしただけで方程式の解を求めることは格段に難しくなる．現在でもこのような方程式の解の振る舞いが完全にわかっているとは言えない．

例 1.4. コイル L，抵抗 R，コンデンサー C からなる直列回路 *(*図 *1.1)* に交流電圧 $V_0\cos\omega t$ が負荷される場合，回路を流れる電流 q は

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V_0\cos\omega t \tag{1.3}$$

に従う．

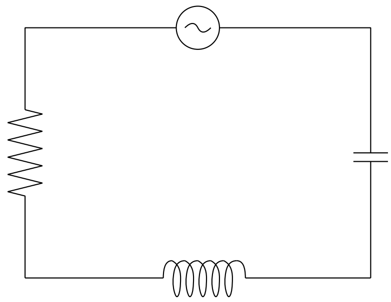

図 1.1

例 1.5.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -px + py\\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y\\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}$$

をローレンツ方程式という．p, r, b は定数であり，具体的には $p = 10, r = 28, b = 8/3$ である．これは，気象を数学的にモデル化したもので，非常に複雑な軌道が現れる．僅かに初期値が異なるだけで，ある程度時間が経過すると大きな違いとなることが，この方程式では実際に起こる．カオスと呼ばれる現象である．図 *1.2* はこの方程式の解を数値シミュレーションにより近似的に求めたものである．

このように解が複雑な振る舞いをする微分方程式を調べる理論を力学系理論という．そのような微分方程式の解を求めることは困難であるが，本講義で学ぶような解法が力学系理論の基礎になる．

例 1.6. 変分問題から導出される微分方程式の例も *1* つ挙げておこう．両端点が固定されたケーブルがあるとする．鉛直下向きに重力を受けたときのケーブルの静止した形状を考える．水平方向を x，

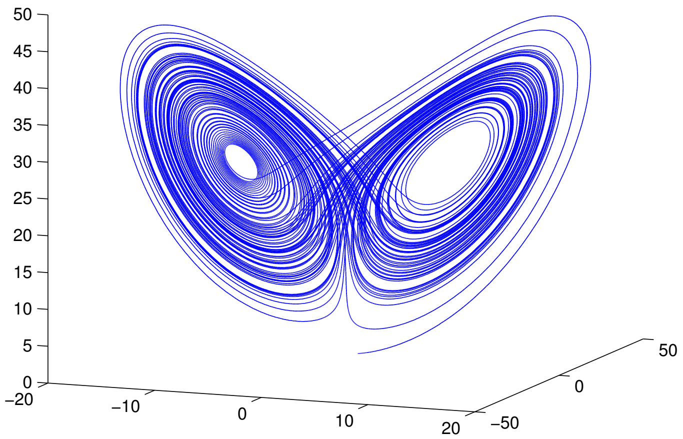

図 1.2　ローレンツ方程式の数値解

鉛直上向きを y としたとき

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

を満たす．m はケーブルの重さや張力など物理的な条件で決まる定数である．

この方程式を解くには少し微分方程式の知識が必要になるが，結果として解は

$$y = \frac{1}{m}\cosh(mx + C_1) + C_2$$

と表せる．なお，cosh は

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

で定義される関数である．

1.2　常微分方程式の種類

例 1.1, 例 1.2 の個体数が 1 種の方程式, 例 1.3, 例 1.4, 例 1.6 のように考えている微分方程式が 1 つの式からなるとき，単独微分方程式という．それに対し， 例 1.2 の Lotka-Volterra 方程式，例 1.5 の方程式のように複数の方程式からなる場合，連立微分方程式とか微分方程式系という．

微分方程式に現れる未知関数の微分の最高階数を，微分方程式の階数といい，階数が n の微分方程式を n 階微分方程式という．例 1.1, 1.2, 1.5 に現れる微分方程式は 1 階，例 1.3, 1.4, 1.6 の方程式は 2 階である．

(1.2) は 2 階の単独微分方程式である．ただし，物理でもやるように運動量を

$$p = \frac{dq}{dt}$$

として導入し，これも新たな未知関数と考えると，(1.2) は

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= p \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{g}{l}\sin q\end{aligned}$$

となる．これは，1 階の連立微分方程式である．このように，多くの場合，式を増やすことで，階数を小さくすることができる．連立で 2 階以上の微分方程式を考える場合は，式を増やして 1 階にする場合が多い．

また，高階の連立微分方程式というのも考えることができるが，その場合は通常 1 階の連立微分方程式に直すことができる．例えば，

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= f\left(x, y, \frac{dx}{dt}, t\right) \\ \frac{dy}{dt} &= g\left(x, y, \frac{dx}{dt}, t\right)\end{aligned}$$

の場合，$z = \frac{dx}{dt}$ を未知関数とみなすと，

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= z \\ \frac{dy}{dt} &= g\left(x, y, z, t\right) \\ \frac{dz}{dt} &= f\left(x, y, z, t\right)\end{aligned}$$

と未知関数と方程式は増えるが 1 階の連立微分方程式で表せる．連立微分方程式は通常 1 階のもののみ考える．

同じことではあるが，単独微分方程式 (1.4) は

$$x_1 = x, x_2 = \frac{dx}{dt}, x_3 = \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, x_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$$

とすることで，1 階の連立微分方程式

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \quad \frac{dx_n}{dt} = f(x_1, \ldots, x_n, t)$$

と表すことができる．つまり，単独微分方程式 (1.4) は連立微分方程式 (1.5) の特別な場合とみなすことができる．

前節の例のように，講義では，単独の方程式については

$$\frac{d^nx}{dt^n} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, t\right) \tag{1.4}$$

のように最高階数の導関数について整理できる方程式，連立の方程式は 1 階で

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \ldots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, \ldots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \ldots, x_n, t)\end{aligned} \tag{1.5}$$

と導関数について整理できる方程式を扱う．このような形の微分方程式を正規形という．

非正規形ほ微分方程式とは例えば，

$$x = t\frac{dx}{dt}\left(\frac{dx}{dt}+1\right)+\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

のように $\frac{dx}{dt}$ について整理できない (しずらい) 方程式である．非正規形の微分方程式は力学でホロノーム拘束系を考える際などに現れることがある．

単独微分方程式 (1.4) の右辺に現れる関数 f が t を陽に含まないとき，つまり

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$$

の形のとき，その微分方程式は自励的であるという．同様に連立微分方程式 (1.5) の右辺に現れる関数 $f_1, \ldots, f_n$ が t を陽に含まないとき，

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \ldots, x_n)\\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, \ldots, x_n)\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned} \tag{1.6}$$

の形のとき，その微分方程式は自励的であるという．つまり，微分方程式の右辺の関数に t が現れないということである．

非自励的な微分方程式は，未知関数を 1 つ増やすことにより，自励的な方程式にできる．(1.5) は自励的な方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\\ \frac{dx_{n+1}}{dt} &= 1\end{aligned}$$

の $x_{n+1}(0) = 0$ を満たす解として考えることができる．

逆に，自励的な微分方程式 (1.6) は，$f_n \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dx_n} &= \frac{f_1(x_1, \ldots, x_n)}{f_n(x_1, \ldots, x_n)}\\ \frac{dx_2}{dx_n} &= \frac{f_2(x_1, \ldots, x_n)}{f_n(x_1, \ldots, x_n)}\\ &\vdots\\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} &= \frac{f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)}{f_n(x_1, \ldots, x_n)}\end{aligned}$$

を導き，未知関数が 1 つ少ない非自励的微分方程式になる．

1.3　微分方程式を簡単にする方法

■階数を下げる　微分方程式は，階数が大きい方が難しいし，連立であれば未知関数の数が多いほど難しい．しかし，低い階数の導関数が現れなければ，階数を下げることができる．

例 1.7.

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

は *3* 階の単独微分方程式だが，$x, \frac{dx}{dt}$ は現れないので，$y = \frac{d^2x}{dt^2}$ とおくと y に関する *1* 階の微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = y$$

になる．この解は，例 *1.1* で解いたように，$y = C_1e^t$ と表せる．これを，*2* 回積分することで，解は

$$x = C_1e^t + C_2t + C_3$$

と表せる．

■非正規系を正規系にする　非正規の微分方程式

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = 0$$

を考える．$p(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ とおくと，

$$F(x, p, t) = 0$$

と表される．これを，t で微分すると

$$F_x(x,p,t)\frac{dx}{dt} + F_p(x,p,t)\frac{dp}{dt} + F_t(x,p,t) = 0$$

だから $F_p(x,p,t) \neq 0$ ならば

$$\frac{dx}{dt} = p$$
$$\frac{dp}{dt} = -\frac{F_x(x,p,t)p + F_t(x,p,t)}{F_p(x,p,t)}$$

と，正規形になる．これは連立微分方程式だが，場合によっては第 2 式の右辺が x によらず p に関する単独微分方程式になる．

一つだけ有名な例を挙げておこう．

例 1.8.

$$x = t\frac{dx}{dt} + f(\frac{dx}{dt})$$

をクレロー方程式という．

$f(\dot{x}) = -\frac{\dot{x}^2}{2}$ の場合を考えよう．クレロー方程式

$$x = t\dot{x} - \frac{\dot{x}^2}{2}$$

を t で微分すると，

$$\begin{aligned}\dot{x} &= t\ddot{x} + \dot{x} - \dot{x}\ddot{x} \\ \ddot{x}(t-\dot{x}) &= 0\end{aligned}$$

となるので，解は $\ddot{x}=0$ あるいは $\dot{x}=t$ を満たす．よって，解は

$$x = c_1 t + c_2, \frac{1}{2}t^2 + c_3$$

の形になる．途中で微分しているので，この解が元の方程式と必要十分とは限らない．クレロー方程式に代入してみると，$c_2 = -\frac{c_1^2}{2}, c_3 = 0$ となる．よって，解は

$$x = c_1 t - \frac{c_1^2}{2}, \frac{1}{2}t^2$$

となる．これを (t,x) 平面に描くと，放物線 $x=\frac{1}{2}t^2$ とそれに接する直線になる．

■定数を簡単にする　物理や工学などにおける現象をモデルにした時に，微分方程式には様々な定数が含まれることになる．それらのいくつかは尺度変換により 1 などの簡単な数に置き換えることができる．

例 1.9. *Lotka-Volterra* 方程式

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= (A - Bv)u \\ \frac{dv}{dt} &= (Cu - D)v\end{aligned}$$

を例に定数を減らす方法を紹介しておこう．$u=\alpha U, v=\beta V, t=\gamma T$ により *Lotka-Volterra* 方程式を変換すると，

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dT} &= \gamma(A - B\beta V)U \\ \frac{dV}{dT} &= \gamma(C\alpha U - D)V\end{aligned}$$

$\alpha = A/C, \beta = A/B, \gamma = 1/A$ とし，$D' = D/A$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dT} &= (1 - V)U \\ \frac{dV}{dT} &= (U - D')V\end{aligned}$$

と表せる．つまり，*4* つあった定数は *1* つを除き *1* としても一般性を失わないことが分かった．他の例でも，定数を *1* などの簡単な数に置き換えることができる．

1.4　微分方程式の一般解と特殊解

　例 1 で，$u(t_0) = u_0$ として解 $u(t)$ が求まったように，常微分方程式は条件を適切に与えることにより，解が一意に定まる．

定理 1.1. *1* 階連立微分方程式 (1.5) を考える．$f_1(x_1,\dots,x_n,t),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n,t)$ はすべて C^1 級関数[*1]とする．ある t_0 における $x_1,\dots,x_n$ の値

$$x_1(t_0)=b_1,\dots,x_n(t_0)=b_n \tag{1.7}$$

を定めると，$\varepsilon>0$ が存在して，解 $x_1(t),\dots,x_n(t)$ が $t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon$ の範囲で一意に存在する．

(1.8), (1.7) のような条件を初期条件という．

n 階単独微分方程式 (1.4) の場合も (1.5) の形に帰着できるので，ある t_0 における $n-1$ 階までの導関数の値

$$x(t_0)=a_0,\frac{dx}{dt}(t_0)=a_1,\dots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t_0)=a_{n-1} \tag{1.8}$$

と定めることにより，解 $x(t)$ が一意に定まる．

定理 1.1 の証明はもう少し弱い仮定のもとで第 4 章で行う．

微分方程式に初期条件を定めなければ，解は無限個存在する．微分方程式を解いて，その全ての解を表したものを一般解という．それに対し，1 つの解を特殊解とか特解という．

例 1.10.

$$\frac{dx}{dt}=x^2$$

を考えよう．$x\neq 0$ なら

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}&=1\\ \int\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}dt&=\int 1dt\\ \int\frac{1}{x^2}dx&=t+C\\ -\frac{1}{x}&=t+C\\ x&=-\frac{1}{t+C}\end{aligned}$$

となる．C を不定の定数とし，0 をとる解 $x(t)=0$ を加えたもの

$$x=-\frac{1}{t+C},0$$

が一般解である．その中で一つの解と取ったもの，例えば $x=-\frac{1}{t+2}$ は特殊解である．

初期条件 $x(t_0)=x_0$ を満たすものは，$x_0=0$ のとき $x(t)=0$，$x_0\neq 0$ のとき $x(t)=-\frac{x_0}{x_0(t-t_0)-1}$ である．確かに解は一意的に存在するが，解が存在するのは

$$t\in\begin{cases}(-\infty,t_0+\frac{1}{x_0}) & (x_0>0)\\ \mathbb{R} & (x_0=0)\\ (t_0+\frac{1}{x_0},\infty) & (x_0<0)\end{cases}$$

であり，t の範囲は限られている．

(1.4) について，t_0 を固定したとき，初期値は $a_1,\dots,a_n$ のとり方で決まり，初期値を決めるごとに解が 1 つにきまるので，一般解を表示するときは n 個の未定定数をもつことが自然である．(1.5) についても同様で，一般解は n 個の未定の定数をもつ．

[*1] どの変数についても 1 階偏微分可能で，偏導関数が全て連続

1.5　微分方程式を解くということ

次章から微分方程式を解いていくが，微分方程式を解くということはどういうことかということについて少し触れておく．

微分方程式の一般解が t の関数として具体的に表示できればもちろん解けたといってよいが，なかなかそうはいかない．例えば，

$$\frac{dx}{dt} = e^{t^2}, \quad x(0) = 0$$

を考えよう．この解は，t で積分すれば

$$x = \int_0^t e^{s^2} ds$$

と表せる．この右辺にはまだ積分が残っているが，この積分を具体的な関数として表示することは難しい*2．しかし，この積分ができるかどうかは微分方程式を解くという問題よりは積分の問題であって，微分方程式を解く問題としてはできるところまでは達することができたと考えられる．

また，例えば，

$$\frac{dx}{dt} = e^x + 1, x(0) = 0$$

ならば，積分して

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{e^x+1} dx &= t \\
\int_1^{e^x+1} \frac{1}{y}\frac{dy}{y-1} &= t \\
\left[\log \frac{y-1}{y}\right]_2^{e^x+1} &= t \\
x - \log(e^x+1) + \log 2 &= t
\end{aligned}$$

となる．解 $x(t)$ を t の関数として表すには，$F(x) = x - \log(e^x+1) - \log 2$ の逆関数を求める必要がある．それにより $x(t) = F^{-1}(t)$ と表せる．しかし，$F^{-1}(t)$ を具体的な式で表すことができないであろう．このような場合でも，微分方程式は解けたということにする．

また，例 1.2 の Lotka-Volterra 方程式や例 1.3 のように，解が「$H=$ 一定」により解の曲線の形が定まる．この場合も，解が t の関数として具体的に書けたわけではないが，陰関数や逆関数を求めることは別の問題であるし，解の振る舞いはよくわかる場合が多い．振り子の方程式 (1.2) も同様である．振り子の方程式の解は楕円関数を用いれば t の関数として表示できるが，そうするよりも保存量を固定することにより曲線を描く方が解の定性的な性質はよくわかる*3．解が定まるような関係式が得られた場合も，微分方程式としては解けたと考える．

つまり，既知関数の代数的な演算 (代数方程式を解くことも含む) や，原始関数や逆関数，陰関数を取る操作により，解が表示できれば，その微分方程式は求積法により解けるという*4．本講義でも，様々な微分方程式を求積法により解くことを目的とする．

---

*2 というか，できないことが証明されている．実際に，e^{t^2} の原始関数は初等関数 (多項式，三角，指数，対数関数を四則演算，逆関数，合成関数を取る有限回の操作により構成できる関数) では表せないことが微分ガロア理論という理論により示されている．興味ある方は，西岡久美子著「微分体の理論」(共立出版) を参照されたい．

*3 もちろん解析したい内容によっては具体的な表示が必要な場合もある．

*4 本講義ではこの程度の理解でよいが，もし微分方程式を解くということに対する正確な定義を知りたければ，[5] の第 2 章を参照されたい．

第 2 章

1 階単独常微分方程式

この章では，1 階単独常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

の解法を述べる．このような場合でも，必ず解けるわけではなく，なんらかのよい条件が必要になる．

なお，1.2 節で述べたように，この章で扱う非自励的なものも含む 1 階単独常微分方程式の解法は，自励的な 2 連立常微分方程式の解法にもなる．

2.1 変数分離形

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$$

のように微分方程式の右辺が独立変数 t の関数 $g(t)$ と x の関数 $h(x)$ の積で表せるとき，変数分離形の微分方程式という．当然，右辺が x だけの関数，すなわち自励的な場合や t だけの関数の場合は変数分離形である．

変数分離形の解法を述べよう．初期条件

$$x(t_0) = x_0$$

が与えられたとする．$h(x_0) = 0$ とすると $x(t) \equiv 0$ を解とすれば良い．$h(x_0) \neq 0$ とする．すくなくとも t_0 に近い t では $h(x(t)) \neq 0$ と考えてよい．$h(x)$ で微分方程式の両辺を割ると，

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

両辺を積分すると，

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt}dt = \int_{t_0}^{t} g(t)dt.$$

置換積分の公式を使って，

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{h(x)}dx = \int_{t_0}^{t} g(t)dt.$$

左辺は $x(t)$ の関数, 右辺は t の関数になっており，$x(t)$ について解くことがで解が求まる．なお，初期条件が定まっていないときは，不定積分の関係式

$$\int \frac{1}{h(x)}dx = \int g(t)dt.$$

として考え，積分定数を含むことにより一般解が得られる．初期条件が与えられているときでも，一旦積分定数を含む形で解き，初期条件を満たすように積分定数を決めるようにしてもよい．

例 2.1.

$$\frac{dx}{dt} = t(1-x^2)$$

を解こう．$x \neq \pm 1$ ならば

$$\frac{1}{1-x^2}\frac{dx}{dt} = t$$

とできる．両辺を t で積分すると，

$$\int \frac{1}{1-x^2}\frac{dx}{dt}dt = \int t dt$$

となり，置換積分の公式より

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \int t dt$$

となる．両辺を計算すると，

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{2}t^2 + C \\
\| \\
\frac{1}{2}(-\log|1-x| + \log|1+x|) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| &= t^2 + 2C \\
\left|\frac{1+x}{1-x}\right| &= e^{t^2+2C} \\
\frac{1+x}{1-x} &= \pm e^{t^2+2C}
\end{aligned}$$

ここで，

$$C_1 = \pm e^{2C}$$

とおく．すると，

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{1-x} &= C_1 e^{t^2} \\
x &= \frac{C_1 e^{t^2} - 1}{C_1 e^{t^2} + 1}
\end{aligned}$$

これで，一般解が得られた．なお，C_1 を定めた式では $C_1 \neq 0$ であったが，$C_1 = 0$ でも解になっていることに注意しよう．これは，除外していた解 $x \equiv -1$ に対応している．もう *1* つの除外していた解 $x \equiv 1$ は含まれていないので，完全な一般解は

$$x = \frac{C_1 e^{t^2} - 1}{C_1 e^{t^2} + 1}, \quad x \equiv 1$$

となる．

　ここで，初期条件

$$x(0) = x_0$$

が与えられているとしよう．一般解に当てはめると，

$$x(0) = \frac{C_1 - 1}{C_1 + 1} = x_0$$

となり，これから

$$C_1 = \frac{1 + x_0}{1 - x_0}$$

を得る．これより初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{\frac{1+x_0}{1-x_0}e^{t^2} - 1}{\frac{1+x_0}{1-x_0}e^{t^2} + 1} = \frac{(1+x_0)e^{t^2} - 1 + x_0}{(1+x_0)e^{t^2} + 1 - x_0}$$

となる．なお，この式は $x_0 = 1$ の場合でも解になっている．

2.2　同次形

ある関数 f により

$$\frac{dx}{dt} = g\left(\frac{x}{t}\right)$$

と表せる方程式を同次形という．同次形の方程式の場合，$u(t) = x(t)/t$ により変換することにより変数分離形に帰着できる．

実際，左辺は

$$\frac{dx}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$$

で左辺は $g(u)$ だから方程式は

$$u + t\frac{du}{dt} = g(u)$$

に変換される．整理すると，

$$\frac{du}{dt} = \frac{g(u) - u}{t}$$

となるので変数分離形になったので，前節の解法により解くことができる．

例 **2.2.** 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{t}{x}$$

を解いてみよう．$u = x/t$ とおくと

$$\begin{aligned}
u + t\frac{du}{dt} &= u + \frac{1}{u} \\
u\frac{du}{dt} &= \frac{1}{t} \\
\int u\frac{du}{dt}dt &= \int \frac{1}{t}dt \\
\frac{1}{2}u^2 &= \log|t| + C \\
u &= \pm\sqrt{2\log|t| + C_1}
\end{aligned}$$

となる．x に戻すと

$$x = \pm t\sqrt{2\log|t| + C_1}$$

が一般解である．初期条件

$$x(1) = x_0 > 0$$

が与えられたとすると，

$$C_0 = x_0^2$$

となるから，対応する解は

$$x(t) = t\sqrt{2\log t + x_0^2}$$

となる．ここで，$\pm$ は $t = 1$ のところをみることで $+$ に決まることがわかる．また，$t = 0$ では微分方程式は意味を持たないので，この場合 $t > 0$ でしか解は意味を持たない．このことから t の絶対値は省いた．

微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

について，$f(x,t)$ が x,t の同じ次数の斉次多項式の商からなるとき，微分方程式は同次形である．例えば，f の分母分子が 1 次斉次多項式のとき

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_0x + p_1t}{q_0x + q_1t}$$

と表せるが，これは

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_0\frac{x}{t} + p_1}{q_0\frac{x}{t} + q_1}$$

と表せるからである．2 次のときも同様に

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_0x^2 + p_1xt + p_2t^2}{q_0x^2 + q_1xt + q_2t^2} = \frac{p_0(\frac{x}{t})^2 + p_1\frac{x}{t} + p_2}{q_0(\frac{x}{t})^2 + q_1\frac{x}{t} + q_2}$$

と表せて微分方程式は同次形であることがわかった．他の次数の場合も同様である．

さて，微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

の右辺の関数 f が

$$f(\lambda x, \lambda t) = f(x,t) \tag{2.1}$$

を恒等的に満たしていれば同次形である．なぜなら，$\lambda = \frac{1}{t}$ とすることで

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) = f\left(\frac{1}{t}x, \frac{1}{t}t\right) = f\left(\frac{x}{t}, 1\right)$$

となり右辺が $\frac{x}{t}$ の値で決まるからである．逆に，微分方程式が同次形ならば，ある関数 g により

$$f(x,t) = g\left(\frac{x}{t}\right)$$

と表せるので，

$$f(\lambda x, \lambda t) = g\left(\frac{\lambda x}{\lambda t}\right) = g\left(\frac{x}{t}\right) = f(x,t)$$

が成り立つ．つまり，恒等式 (2.1) が同次形であることを特徴づけている．

これを一般化して，ある定数 $a \neq 0$ について

$$f(\lambda^a x, \lambda t) = \lambda^{a-1} f(x,t)$$

が恒等的に成り立つ場合について，微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

を解いてみよう．この場合，

$$x = t^a y$$

と変換するとよい．実際，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -at^{-a-1}x + t^{-a}\frac{dx}{dt}\\ &= -at^{-a-1}x + t^{-a}f(x,t)\\ &= -at^{-a-1}x + t^{-1}f(t^{-a}x,1) \qquad (\lambda = t^{-1}\text{を恒等式に代入})\\ &= t^{-1}(-ay + f(y,1))\end{aligned}$$

となるので変数分離形に帰着された．

2.3　線形微分方程式

微分方程式が未知関数とその導関数について，1 次式になっているとき，線形微分方程式という．1 階線形微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$$

と表すことができる．特に，$Q(t)$ が恒等的に 0 になる場合，この方程式は斉次であるという．斉次 1 階線形微分方程式は変数分離形なので解くことができる．従って，非斉次の場合の方が問題である．

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$$

を考えよう．まず，斉次にした方程式

$$\frac{dz}{dt} + P(t)z = 0 \tag{2.2}$$

をとき，この 1 つの解を $\varphi(t)$ とする．斉次方程式は 0 という自明解をもつが，$\varphi(t)$ は自明解ではないとする．ここで，

$$x = \varphi(t)y$$

とおいて元の方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}y + \varphi\frac{dy}{dt} + P(t)\varphi y &= Q(t)\\ \varphi\frac{dy}{dt} &= Q(t)\end{aligned}$$

となり $y(t)$ は

$$y(t) = \int \frac{Q(t)}{\varphi(t)}dt$$

により得られる．これを，$x = \varphi(t)y$ に代入すると元の方程式の解が得られる．

この方法を定数変化法という．なぜこのような呼び方をするかというと，y を任意の定数とみなすと $\varphi(t)y$ は斉次方程式 (2.2) の一般解を表しており，その定数部分を t の関数とみなすことにより非斉次方程式が解けるからである．

例 2.3.

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2x}{t} = t^2 \cos t$$

を解こう．まず，斉次にした方程式

$$\frac{dz}{dt} - \frac{2z}{t} = 0$$

を解こう．

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{2z}{t} \\
\frac{1}{z}\frac{dz}{dt} &= \frac{2}{t} \\
\int \frac{1}{z}\frac{dz}{dt}dt &= \int \frac{2}{t}dt \\
\log|z| &= 2\log|t| + C \\
z &= \pm e^C t^2 \\
z &= C_1 t^2
\end{aligned}$$

最後に未定の定数を C_1 に置きなおした．t^2 がこの *1* つの解になるので，

$$x = yt^2$$

とおき，元の方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt}t^2 + 2yt - \frac{2yt^2}{t} &= t^2 \cos t \\
\frac{dy}{dt} &= \cos t \\
y &= \sin t + C_2
\end{aligned}$$

となり，一般解は

$$x = t^2(\sin t + C_2)$$

となる．

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^m$$

の形の微分方程式をベルヌーイの方程式という．ベルヌーイの方程式は， $m = 0, 1$ の場合は線形だがそれ以外の場合は非線形である．それでも，うまく変数を変換すると線形な方程式に帰着できる．

$$y = x^\alpha$$

の形の変換をしてみよう．すると，

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \alpha x^{\alpha-1}\frac{dx}{dt} = \alpha x^{\alpha-1}(-P(t)x + Q(t)x^m) \\
&= \alpha(-P(t)x^\alpha + Q(t)x^{\alpha-1+m}) = \alpha(-P(t)y + Q(t)y^{\frac{\alpha-1+m}{\alpha}})
\end{aligned}$$

となるので，$\alpha = 1 - m$ とすると線形方程式

$$\frac{dy}{dt} + (1-m)P(t)y = (1-m)Q(t)$$

になる．

2.4　完全微分方程式

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{2.3}$$

を考える．これまでは，t を独立変数，x を未知関数としてきたが，ここでは独立変数と未知関数を対等に扱いたいので，独立変数を x，未知関数を y により表す．

これを形式的に，

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.4}$$

と表してみる．このような方程式を全微分方程式という．ここでは，x, y ともに独立変数だとみなしている．本来の微分の記法 $\frac{dy}{dx}$ は dx, dy というものの分数ではないが，実際には微分形式という概念を用いると，全微分方程式は数学的に定式化できる．ここでは，微分形式の厳密な定義は述べないが，簡単な計算規則だけを用いて全微分方程式を調べることにする．全微分方程式にしておくと独立変数 x と従属変数 (未知関数)y であった変数をともに独立変数として対等に扱うことができる．

関数 $f(x,y)$ に対して，全微分と呼ばれる微分形式を

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

により定義する．(2.4) に対して，

$$d\Phi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

となる $\Phi(x,y)$ が存在するとき，微分形式は完全形であるといい，その全微分方程式を完全微分方程式と呼ぶ．

完全微分方程式について $d\Phi = 0$ であるから Φ は一定である:

$$\Phi(x,y) = C.$$

これで全微分方程式の解が定まる．

この結果を，もとの常微分方程式 (2.3) について述べると，(2.3) の各解 $y(x)$ に対して $\Phi(x, y(x))$ は一定

$$\Phi(x, y(x)) = C$$

であるということになる．このことを微分形式を経由せずに直接証明してみよう．

$\Phi(x,y)$ は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

を満たすものであった．$y(x)$ を (2.3) の解とすると，

$$\frac{d\Phi(x,y(x))}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\left(-\frac{P(x,y(x))}{Q(x,y(x))}\right) = 0$$

となり，$\Phi(x,y(x))$ は一定ということが分かる．そうすれば，$y(x)$ の振る舞いはよく分かる．常微分方程式は解けたと言ってよいであろう．つまり (2.3) について，対応する全微分方程式が完全であれば解ける．次はそのための条件を与えるものである．

定理 2.1. P, Q が平面全体で定義された滑らかな関数であるとする．

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

が完全であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

が成り立つことである．

証明．(必要性)
完全形ならば，

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$$

を満たす Φ があるから，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

となる．これで示せた．
(十分性)
実際に Φ を構成する．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$$

を満たさないといけないから，Φ は

$$\Phi(x,y) = \int_0^x P(s,y)ds + g(y)$$

の形である．あとは

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

が成り立てば良い．これは

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^x P(s,y)ds + \frac{dg}{dy}(y) = Q(x,y)$$

と表せる．
ここで，

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^x P(s,y)ds = \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(s,y)ds = \int_0^x \frac{\partial Q}{\partial x}(s,y)ds = Q(x,y) - Q(0,y)$$

であるから，

$$g(y) = \int_0^y Q(0,u)du$$

とおけばよい．Φ は

$$\Phi(x,y) = \int_0^x P(s,y)ds + \int_0^y Q(0,u)du$$

となる．
確認のためこの Φ が求めていたものであることを確かめよう．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$$

はすぐわかる．もう一つの方も

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) &= \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(s,y)ds + Q(0,y)\\ &= \int_0^x \frac{\partial Q}{\partial x}(s,y)ds + Q(0,y)\\ &= Q(x,y) - Q(0,y) + Q(0,y)\\ &= Q(x,y)\end{aligned}$$

となり確かめられた． □

例 2.4.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2+\cos y}$$

を解こう．対応する全微分方程式は

$$2xydx + (x^2+\cos y)dy = 0$$

である．

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial(x^2+\cos y)}{\partial x} = 2x$$

だから完全形である．従って，

$$\Phi_x = 2xy, \quad \Phi_y = x^2+\cos y$$

となる $\Phi(x,y)$ が存在するはずである．実際，

$$\Phi(x,y) = x^2y + \sin y$$

とおくとよい．もとの常微分方程式の解はこの値を一定に保つから，一般解として

$$x^2y + \sin y = C$$

を得る．

微分形式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

が完全形でないときでも，完全形に直せる場合もある．

適当な関数 $\lambda(x,y)$ をかけて

$$\lambda(x,y)P(x,y)dx + \lambda(x,y)Q(x,y)dy$$

が完全形になればよい．このようにしてももとの常微分方程式は

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\lambda(x,y)P(x,y)}{\lambda(x,y)Q(x,y)} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

で変わらないから完全形になるような $\lambda(x,y)$ を見つければよい．

$$\lambda(x,y)P(x,y)dx + \lambda(x,y)Q(x,y)dy$$

が完全形になるような $\lambda(x,y)$ を積分因子という．

λ が積分因子となるための必要十分条件は

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q),$$

つまり

$$\lambda_y P + \lambda P_y = \lambda_x Q + \lambda Q_x \tag{2.5}$$

である．積分因子が 1 つでも求まれば全微分方程式や対応する常微分方程式が解けるわけだが，残念ながら積分因子を求めることは一般には難しい．うまく積分因子が見つかる例を挙げておこう．

例 2.5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y}{x}$$

を考える．対応する全微分方程式は，

$$(x^2 + y)dx - xdy = 0$$

である．

$$\frac{\partial(x^2 + y)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1$$

だから完全形ではない．

積分因子を求めてみよう．(2.5) に代入してみると，

$$\lambda_y(x^2 + y) = \lambda_x(-x) - 2\lambda$$

となる．$\lambda(x, y)$ が y によらなければ左辺は 0 で，x の適当な関数をとれば右辺も 0 にできそうである．λ を x のみの関数とし，

$$x\frac{d\lambda}{dx} = -2\lambda$$

が成り立てばよい．これは簡単な常微分方程式だから解いてみると，

$$\begin{gathered}\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{2}{x} \\ \int \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx}dx = -\int \frac{2dx}{x} \\ \log|\lambda| = -2\log|x| + C \\ \lambda = C_1 x^{-2}\end{gathered}$$

積分因子は *1* つあればよいので $\lambda = x^{-2}$ とする．

積分因子をかけると全微分方程式は

$$(1 + x^{-2}y)dx - x^{-1}dy = 0$$

となる．これは完全形だから，

$$d\Phi = (1 + x^{-2}y)dx - x^{-1}dy$$

なる Φ が存在する．実際，

$$\Phi = x - x^{-1}y$$

とおけばよい．これが一定値に保たれるから，

$$x - x^{-1}y = C$$

つまり，

$$y = x(x - C)$$

が解となる．

例 2.6. 例 *1.2* で挙げた *Lotka-Volterra* 方程式

$$\frac{du}{dt} = (A - Bv)u$$
$$\frac{dv}{dt} = (Cu - D)v$$

について改めて考えよう．

v を独立変数とした方程式で表すと

$$\frac{du}{dv} = \frac{(A - Bv)u}{(Cu - D)v}$$

となる．変数分離形であるので，*2.1* 節で紹介した解法でも解けるが，ここでは全微分方程式の形式から保存量を導出しよう．

対応する全微分方程式は

$$(Cu - D)vdu - (A - Bv)udv = 0$$

である．これは完全形ではない．du の係数が u のみの関数，dv の係数が v のみの関数となれば完全形なので，積分因子は

$$\lambda = \frac{1}{uv}$$

とすればよいことがわかる．すると，

$$\lambda((Cu - D)vdu - (A - Bv)udv) = \frac{Cu - D}{u}du - \frac{A - Bv}{v}dv$$

となり，

$$\Phi_u = \frac{Cu - D}{u}, \Phi_v = -\frac{A - Bv}{v}$$

となる Φ が保存量になり，具体的には

$$\Phi = Cu - D\log u - A\log v + Bv$$

である．

最後に，この方法を高次の微分方程式にも拡張しておこう．

$$F(x, y, z) = P(x, y) + Q(x, y)z$$

とおくと，元の微分方程式は $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ と表せる．$\Phi(x, y)$ は

$$\frac{d\Phi(x, y(x))}{dx} = F\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}(x)\right)$$

を満たすものであるから，Φ は各解に沿って一定である．この観点で見ると，高階の微分方程式にも適用できる．関数 $F(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ を用いて，

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

と表せる微分方程式に対して，

$$\frac{d}{dx}\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

となる $\Phi(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1})$ が存在すれば各解に沿って Φ は一定である．ただし，$n \geq 2$ であれば，Φ を求めることはよりさらに困難である．

2.5　注意

単独 1 階常微分方程式の解法はここまでとする．単独 1 階でもいつでも解けるわけではなく，変数分離形，同次形，線形，完全形などなんらかの特別な性質がある場合に解けるということである．従って，解けない場合もある．

例えば，リッカチ方程式

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + t$$

は解けない．リウヴィルにより解けないことが (もっと一般的な方程式について) 証明されている．そもそも解けるということは，初等関数，多項式などの四則演算，合成，微分，積分，逆関数をとるといった操作を有限回行って解が表せるということであった．この方程式に関しては，そういった操作では解を表すことができない．一方でいずれ示すが，常微分方程式について (ある程度の仮定のもとで) 解の存在と一意性は示されている．リッカチ方程式のような微分方程式では，解は存在するが解は具体的な関数としては表せないということである．

近年では，微分ガロア理論によりパンルヴェ方程式など様々な微分方程式に対して，既約性 (既知関数では解を表せないこと) が証明されている．[*1]

[*1] 興味ある方は，梅村浩著「ガロア/偉大なる曖昧さの理論」(現代数学社)，西岡久美子著「微分体の理論」(共立出版) を参照されたい．久賀道郎著「ガロアの夢」(日本評論社) も参考になると思う．

第 3 章

線形微分方程式

前章では，1 階の単独微分方程式を解いてきた．高階の単独微分方程式や 1 階の連立微分方程式となると一般には解くことができない．しかし，微分方程式が線形性を持てば，解の空間も線形性を持つなど，特別な良い性質がある．2.3 節で解いたように，1 階のの単独微分方程式の場合は線形性により解くことができたと言える．2 階以上の単独微分方程式の場合や連立微分方程式の場合は変数係数であれば線形であっても解くことは困難であるが，定数係数の場合は解くことができる．

3.1 連立定数係数線形微分方程式

1 階連立定数係数線形微分方程式

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} =& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
\frac{dx_2}{dt} =& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} =& a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned}$$

を考える．a_{ij} は全て定数である．ここで，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とおき，上の連立微分方程式を

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} \tag{3.1}$$

と表すことにする．

もっとも簡単な $n = 1$ の場合，この微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

で，初期条件を $x(t_0) = x_0$ とすると解は

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0$$

となる．

この指数関数による解の表示は，一般の (3.1) に対しても拡張できる．そのために，行列の指数関数を定義しておく．実数 ξ に対する指数関数 e^ξ はテイラー展開により

$$e^\xi = 1 + \xi + \frac{1}{2!}\xi + \cdots + \frac{1}{k!}\xi^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\xi^k \tag{3.2}$$

と表されたから，n 次正方行列に対しても

$$e^X = I + X + \frac{1}{2!}X + \cdots + \frac{1}{k!}X^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}X^k$$

と定義することにする．$\exp X$ と表すこともある．ここで，I と X^0 は n 次の単位行列である．

定理 3.1. 任意の n 次正方行列 X に対し，e^X の各成分を定める級数は絶対収束し，以下の性質を持つ．

1. $e^O = I$ (O は n 次ゼロ行列)
2. $XY = YX$ なら $e^X e^Y = e^{X+Y}$
3. $(e^X)^{-1} = e^{-X}$．特に，e^X は常に正則行列である．
4. $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$
5. 正則行列 P に対して $e^{P^{-1}XP} = P^{-1}e^X P$
6. λ が X の固有値なら，e^λ は e^X の固有値で対応する固有ベクトルは同じものである．
7. $\det e^X = e^{\mathrm{trace}(X)}$

なお，X や固有ベクトルの成分や固有値は複素数でもよい．ξ が複素数の場合の $e^\xi mo$ (3.2) により定めるものとする．

証明. $X = (a_{ij})$ とし，$|a_{ij}| \le \mu (i, j = 1, \ldots, n)$ とする．X^k の (i, j) 成分を $a_{ij}^{(k)}$ と表すことにする．このとき，任意の i, j, k に対して $|a_{ij}^{(k)}| \le \mu^k n^{k-1}$ が成り立つ．実際，$k = 0$ の時は自明で，k の時に成立するとすると

$$|a_{ij}^{(k+1)}| = \left| \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k)} a_{lj} \right| \le \sum_{l=1}^{n} |a_{il}^{(k)}||a_{lj}| \le \sum_{l=1}^{n} \mu^k n^{k-1} \mu \le \mu^{k+1} n^k$$

となり，$k + 1$ の場合も成立するからである．従って，$\exp X$ の (i, j) 成分を定める級数は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)} \right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mu^k n^{k-1} \le \frac{1}{n} e^{\mu n}$$

となるので，絶対収束する．

1 は自明．絶対収束級数の和の順序は変えれ，また $XY = YX$ より二項定理が使えるので，

$$\begin{aligned} e^{X+Y} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(X+Y)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{k!} {}_k C_l X^k Y^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{l!(k-l)!} X^k Y^{k-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!(k-l)!} X^k Y^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{l!m!} X^k Y^m = e^X e^Y \end{aligned}$$

ここで，無限和の調整は $(k,l) \in \{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq l \leq k\} \mapsto (k,m) = (k,k-l) \in \{(k,m) \in \mathbb{Z}^2 \mid k \geq 0, m \geq 0\}$ と全単射になることによる．2 の性質が導かれる．3 は 2 の式に $Y = -X$ を代入すれば導かれる．e^{tA} の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)} t^k$$

であり，これは t のべき級数であるから，項別微分可能である．つまり，

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)} t^k \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} a_{ij}^{(k)} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k+1)} t^k$$

が成り立つ．左辺は $\frac{d}{dt} e^{tA}$ の (i,j) 成分で，右辺は $Ae^{tA}, e^{tA}A$ の (i,j) 成分である．これで 4 が示された．

5 は実際計算してみると，

$$e^{P^{-1}XP} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (P^{-1}XP)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P^{-1} X^k P = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right) P = P^{-1} e^X P$$

となり，示された．

λ を X の固有値，$\boldsymbol{a}$ をそれに対応する固有ベクトルとすると，$X\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}$ が成り立つ．これより，

$$e^X \boldsymbol{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \boldsymbol{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \boldsymbol{a} = e^{\lambda} \boldsymbol{a}$$

となり，これは e^{λ} が e^X の固有値で $\boldsymbol{a}$ がそれに対応する固有ベクトルであることを表している．これで，6 も示された．

X の固有値を重複を許して $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とすると，X を正則行列 P により $P^{-1}XP$ は対角成分が $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の上三角行列 (もちろん対角化可能の場合は対角行列，一般の場合はジョルダン標準形でもよい) にできる．$e^{P^{-1}XP}$ は対角成分が $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ の上三角行列になる．

$$\det e^X = \det P^{-1} e^X P = \det e^{P^{-1}XP} = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \ldots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = e^{\mathrm{trace}(X)}$$

となり，7 も示せた． □

さて，行列の指数関数を用いると，連立微分方程式 (3.1) は直ちに解ける．

定理 3.2. (3.1) の初期条件

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

を満たす解は，

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-t_0)A} \boldsymbol{x}_0$$

で与えられる．

証明. まず，初期条件を確かめる．

$$\boldsymbol{x}(t_0) = e^{0A} \boldsymbol{x}_0 = e^{O} \boldsymbol{x}_0 = I \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0$$

で確かめられた．微分すると，

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{x}(t) = \frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A} \boldsymbol{x}_0 = \frac{d}{dt} e^{tA} e^{-t_0 A} \boldsymbol{x}_0 = A e^{tA} e^{-t_0 A} \boldsymbol{x}_0 = A e^{(t-t_0)A} \boldsymbol{x}_0 = A \boldsymbol{x}(t)$$

となり微分方程式を満たすことも確かめられた． □

これで，連立微分方程式 (3.1) は一般に解けたともいえるが，このままでは解の各成分を具体的に表示できてはいない．実際には，行列の指数関数はそのまま定義に基づいて計算するのは困難である．例えば，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

のような行列でも e^{tA} を定義の式から求めるのは困難であろう．

そこで役に立つのが線形代数で学んだ行列の対角化やジョルダン標準形である．少し線形代数を復習しておくと，A があるベクトル $\boldsymbol{u}(\neq \boldsymbol{0})$ とスカラー λ で

$$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$$

を満たすとする．このとき， λ を A の固有値，$\boldsymbol{u}$ を λ に対応する A の固有ベクトルという．

固有値は固有多項式

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

を解けば求まり，固有値 λ に対する固有ベクトルは

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{u}(\neq \boldsymbol{0})$ を求めればよい．

固有値は n 次多項式の根だから一般には複素数まで含めると n 個 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ あり，そのそれぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ が存在し，$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ は一次独立になる．よって，$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底になる．

固有多項式が重根を持てば，固有値は n 個より少ない．重根の固有値に対応する固有ベクトルは 1 個しかない場合もから重根の重複度の分だけ一次独立な固有ベクトルが取れることもある．すると，全ての固有ベクトルを集めても，$\mathbb{R}^n$ の基底にならないこともあるし，基底になることもある．

固有値が全て実数で，固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底になる場合について述べる．P をこれらを並べて作った n 次行列とする:

$$P = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$$

すると P は正則行列になる．固有値，固有ベクトルの性質から

$$P\Lambda = AP$$

が成り立つ．ここで，

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

である．

$$e^{tA} = e^{tP\Lambda P^{-1}} = Pe^{t\Lambda}P^{-1}$$

より $e^{t\Lambda}$ が求まればよい．$t\Lambda$ は対角行列で，指数関数に出てくる和や積は各対角成分ごとにすることになるから，

$$e^{t\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

となる．これで，初期条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ を満たす解は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0 = Pe^{(t-t_0)\Lambda}P^{-1}\boldsymbol{x}_0$$

と求まる．

例 3.1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

とする．微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を解こう．

A の固有値，固有ベクトルを求める．

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 \\ 4 & \lambda-5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3)$$

だから，固有値は $\lambda = 1, 3$. 1 に対する固有ベクトルは

$$(I - A)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

を満たすベクトルだから $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．3 に対する固有ベクトルは

$$(3I - A)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

を満たすベクトルだから $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする．固有ベクトルを並べて，行列 P を作る:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である．また，P の逆行列は

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である．これで，準備は整った．求める解は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{tA}\boldsymbol{x}_0 \\
&= e^{P(tP^{-1}AP)P^{-1}}\boldsymbol{x}_0 \\
&= Pe^{tP^{-1}AP}P^{-1}\boldsymbol{x}_0 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{3t} \\ 3e^t - 4e^{3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．

次に，複素固有値を持つ場合を考えるが，複素固有値が現れたとしても，上の議論はそのまま適用できる．対角行列や P は複素固有値となるが，結果として得られる解は (当然ではあるが) 実数成分をもつ解が得られる．

複素数の指数関数について少し復習しておこう．実数 z に対する指数関数 e^z はテイラー展開できて

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

が成り立つ．右辺の級数の収束半径は無限大だから全ての実数 z で成り立つ等式である．しかも，この右辺は z を複素数にしても収束する．従って，右辺の級数により e^z を定義することにすると，e^z は複素関数として意味をもつ．z を実数 r, s により $z = r + is$ と表すと，

$$e^z = e^{r+is} = e^r(\cos s + i \sin s)$$

が成り立つ (オイラーの公式)．

例 3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を解こう．

A の固有値を求める．

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

だから固有値は $\lambda = 1 \pm 2i$ である．固有ベクトルを求める．

$$(1 \pm 2i)I - A = \begin{pmatrix} \pm 2i & -4 \\ 1 & \pm 2i \end{pmatrix}$$

だから $\begin{pmatrix} 2i \\ \mp 1 \end{pmatrix}$ がそれぞれに対応する固有ベクトルである．

$$P = \begin{pmatrix} 2i & 2i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}$$

と対角化できる．この対角行列を Λ とおく．

$$\exp(t\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(\cos 2t + i \sin 2t) & 0 \\ 0 & e^t(\cos 2t - i \sin 2t) \end{pmatrix}$$

となる．また，P の逆行列は

$$P^{-1} = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$$

である．さて，これを用いて $\exp(tA)$ を計算する．

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \exp(tP\Lambda P^{-1}) \\
&= P\exp(t\Lambda)P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2i & 2i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t(\cos 2t + i\sin 2t) & 0 \\ 0 & e^t(\cos 2t - i\sin 2t) \end{pmatrix}\frac{1}{4i}\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^t\cos 2t & 2e^t\sin 2t \\ -\frac{1}{2}e^t\sin 2t & e^t\cos 2t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．よって，解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos 2t & 2e^t\sin 2t \\ -\frac{1}{2}e^t\sin 2t & e^t\cos 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t\cos 2t + 2e^t\sin 2t \\ -\frac{1}{2}e^t\sin 2t + e^t\cos 2t \end{pmatrix}$$

である．

さて，次に対角化不可能な場合を述べる．対角化できなくても，行列は必ずジョルダン標準形にはできるのであった．つまり，行列 A に対して正則行列 P が存在して，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, n_1) & O & \cdots & O \\ O & J(\lambda_2, n_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & J(\lambda_s, n_s) \end{pmatrix}$$

と表せるのであった．この右辺を Γ と置くことにする．ここで， $J(\lambda_l, n_l)$ はジョルダン細胞と呼ばれる n_l 次行列で次のように表される:

$$J(\lambda_l, n_l) = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_l \end{pmatrix}.$$

$\exp(t\Gamma)$ が求まれば良いわけだが，

$$\exp(t\Gamma) = \begin{pmatrix} \exp(tJ(\lambda_1, n_1)) & O & \cdots & O \\ O & \exp(tJ(\lambda_2, n_2)) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & \exp(tJ(\lambda_s, n_s)) \end{pmatrix}$$

だから $\exp(tJ(\lambda_l, n_l))(l = 1, \ldots, s)$ が求まれば良い．j 行 $j+1$ 列 $(j = 1, \ldots, n_l - 1)$ が 1，他の成分が全て 0 の n_l 次行列を $N(n_l)$ とする:

$$N(n_l) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$J(\lambda_l, n_l)$ は

$$J(\lambda_l, n_l) = \lambda_l I + N(n_l)$$

と表すことができる．$1 \le m \le n_l - 1$ なら $N(n_l)^m$ は j 行 $j+m$ 列 $(j = 1, \ldots, n_l - m)$ が 1 で他の成分が 0 の行列で, $m \ge n_l$ なら $N(n_l)^m$ はゼロ行列である．これらを踏まえてジョルダン細胞の指数関数を計算する．以下の計算で，$N(n_l)^0$ は単位行列 I を表すことにする．

$$\begin{aligned}
\exp(tJ(\lambda_l, n_l)) &= \exp(t\lambda_l I + tN(n_l)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(t\lambda_l I + tN(n_l))^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} {}_kC_i \lambda_l^i N(n_l)^{k-i} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{t^k}{k!} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda_l^i N(n_l)^{k-i} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!} t^k \lambda_l^i N(n_l)^{k-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{i!(k-i)!} t^k \lambda_l^i N(n_l)^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{i!k!} t^{k+i} \lambda_l^i N(n_l)^k = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n_l-1} \frac{1}{i!k!} t^{k+i} \lambda_l^i N(n_l)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n_l-1} \frac{1}{k!} t^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^i \lambda_l^i N(n_l)^k = e^{t\lambda_l} \sum_{k=0}^{n_l-1} \frac{1}{k!} t^k N(n_l)^k
\end{aligned}$$

となり，ジョルダン細胞の指数関数が得られた．成分を表示すると

$$\exp(tJ(\lambda_l, n_l)) = e^{t\lambda_l} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_l-1}}{(n_l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

3.2　高階単独線形常微分方程式

この節では，高階の単独線形常微分方程式を学ぶ．

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = 0$$

を考える．これは 1 階の連立微分方程式に帰着できる．実際，

$$x_1(t) = x(t), x_2(t) = \frac{dx}{dt}(t), \ldots, x_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t)$$

とし，これらを未知関数とすると，1 階の連立微分方程式

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} =& x_2 \\
\frac{dx_2}{dt} =& x_3 \\
&\vdots \\
\frac{dx_{n-1}}{dt} =& x_n \\
\frac{dx_n}{dt} =& -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1
\end{aligned}$$

が得られる．ベクトルで表すと

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

となる．この形の行列 A を (転置) 同伴行列という．A の固有多項式は

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

であり，固有多項式の係数が直ちにわかる形の行列として有名である．

単独高階線形方程式は 1 階連立線形方程式に帰着できるので，これまで学んだ方法で解くことができる．しかし，単独高階の方程式を解くことに限れば，より簡明な解法があるのでここで紹介する．

まず，斉次 1 階定数係数線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} - \lambda x = 0 \tag{3.3}$$

を考えよう．この方程式は簡単に解けて一般解は $x = Ce^{\lambda t}$ である．

この節では，$\frac{dx}{dt}$ を Dx と表わそう．実体としては $\frac{dx}{dt}$ と Dx は同じものだが，関数 $x(t)$ から新たな関数 $Dx(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ を作るというニュアンスがあり，D を微分演算子と言ったりする．そして (3.3) を

$$(D - \lambda)x = 0$$

と表すことにする．この左辺も関数 $x(t)$ から $\frac{dx}{dt}(t) - \lambda x(t)$ という関数を作ったとみて，この方程式はできた関数が恒等的に 0 になるということになる．すでに述べたように，

$$(D - \lambda)x = 0$$

の一般解は $x(t) = Ce^{\lambda t}$ である．また，非斉次方程式

$$(D - \lambda)x = f(t)$$

を考えると，これもすでに紹介した定数変化法により解くことができて，一般解は

$$x(t) = e^{\lambda t}\left(\int^t e^{-\lambda s} f(s)ds\right)$$

と表すことができる．この積分 $\int^t e^{-\lambda s} f(s)ds$ は不定積分である．通常なら $\int e^{-\lambda t} f(t)dt$ と表すべきところだが，積分の外にも t の関数 $e^{\lambda t}$ があり，紛らわしいので積分変数を s と表し，得られた原始関数に t を代入したものとする．積分定数をつけることにより，一般解が表示できる．

次に，斉次 2 階定数係数線形微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0$$

を考える．ここでも，$\frac{d^2x}{dt^2}$ も D^2x と書くことにして，この微分方程式を

$$(D^2 + aD + b)x = 0$$

と表す．ここで現れたような，微分演算子 D の多項式 $D^2 + aD + b$ や $D - \lambda$ を微分作用素という．$D^2 + aD + b$ の部分を形式的に D の 2 次多項式とみて，

$$D^2 + aD + b = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$$

と実数 λ_1, λ_2 により因数分解できたとしよう．すると微分方程式は

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x = 0$$

と表すことができる．これは実際に，$x(t)$ に対し $(D - \lambda_2)$ を作用させた関数 $(D - \lambda_2)x$ にさらに $(D - \lambda_1)$ を作用させた関数 $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x$ が 0 になるということはもとの微分方程式と同等であることはほとんど自明である．

$$(D - \lambda_1)\{(D - \lambda_2)x\} = 0$$

とみると

$$(D - \lambda_2)x = Ce^{\lambda_1 t}$$

であることが分かる．さらにこれを解くと，

$$x(t) = e^{\lambda_2 t}\left(\int^t e^{-\lambda_2 s} \times Ce^{\lambda_1 s} ds\right) = Ce^{\lambda_2 t}\left(\int^t e^{(\lambda_1 - \lambda_2)s} ds\right)$$

となる．

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ なら

$$x(t) = Ce^{\lambda_2 t}\left(\int^t e^{(\lambda_1 - \lambda_2)s} ds\right) = Ce^{\lambda_2 t}\left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C'\right) = \frac{C}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_1 t} + CC'e^{\lambda_2 t}$$

となり定数部分を整理すると，一般解は

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

と表すことができる．

また，$\lambda_1 = \lambda_2$ のとき

$$x(t) = e^{\lambda_1 t}\left(\int^t C dt\right) = e^{\lambda_1 t}(Ct + C')$$

となる．

このように，代数方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

の解 λ_1, λ_2 が重要な役割を果たす．この方程式を微分方程式の特性方程式という．特性方程式の解が実数の場合はすでに述べた．

では，虚数解となる場合について述べよう．連立微分方程式の場合と同様に，λ_1, λ_2 が虚数になってもほとんど同じようにできる．

a, b は実数だから λ_1, λ_2 は互いに複素共役なので

$$\lambda_1 = p + iq, \quad \lambda_2 = p - iq$$

と表せる．すると一般解は

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= C_1 e^{pt+iqt} + C_2 e^{pt-iqt} \\ &= C_1 e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) + C_2 e^{pt}(\cos(-qt) + i\sin(-qt)) \\ &= C_1 e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) + C_2 e^{pt}(\cos qt - i\sin qt) \\ &= (C_1 + C_2)e^{pt}\cos qt + (C_1 - C_2)ie^{pt}\sin qt \end{aligned}$$

となる．見かけ上，虚数が現れるが，初期値が実数値として与えられれば，C_1, C_2 は互いに複素共役になり解は実数値関数になる．

定数をとり直すと，一般解は

$$x(t) = C_1' e^{pt}\cos qt + C_2' e^{pt}\sin qt$$

と表すことができる．

さて，改めてもとの微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0$$

を見てみよう．$x_1(t), x_2(t)$ がこの方程式の解だとすると，$x_1(t) + x_2(t), cx_1(t)$ も解であることが分かる．線形代数の用語を用いてこのことを述べると，V をこの微分方程式の解全体の集合とすると，V が線形空間になるということになる．このことは，微分方程式が線形で斉次であることからの帰結である．すでに得られた一般解から，特性方程式の解 λ_1, λ_2 が異なる実数のとき，$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ が V の基底になっていることが分かる．$\lambda_1 = \lambda_2$ のときは $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}$ が，$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = p + iq$ のときは $e^{pt}\cos qt, e^{pt}\sin qt$ が V の基底になる．また，以上のことから V が 2 次元であることも分かる．V の基底となる解の組を基本解という．

例 3.3.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

を解こう．

特性方程式は

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

でこの解は $\lambda = -1, -2$ である．よって，e^{-t}, e^{-2t} が基本解である．一般解は,

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

と表される．

例 3.4.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

の一般解を求めよう．また，初期条件

$$x(0) = 2, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

を満たす解も求めよう．

特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

でこの解は

$$\lambda = -1 \pm 2i$$

である．よって，一般解は

$$x(t) = C_1 e^{-t} \cos 2t + C_2 e^{-t} \sin 2t$$

と表せる．

初期条件を課すと，

$$x(0) = C_1 = 2,$$
$$\frac{dx}{dt}(0) = -C_1 + 2C_2 = 0$$

だから，これを解いて

$$C_1 = 2, \quad C_2 = 1$$

が得られる．よって，求める解は

$$x(t) = e^{-t}(2\cos 2t + \sin 2t)$$

となる．

より一般化して，n 階の斉次定数係数線形微分方程式

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = 0$$

を考えよう．

V を微分方程式の解全体の集合とする．前と同様に V は線形空間である．n 階の単独線形方程式について，V は n 次元である．このことは，別の章で述べる常微分方程式の基本定理より分かる．従って，n 個の独立な解を求めれば，一般解が得られたことになる．

この場合も，

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0$$

と書き，対応する特性方程式

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

を考える．特性方程式が

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

と因数分解できたとする．

まず，特性方程式の解 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ が全て異なる場合を考える．虚数が含まれていても良い．2 階の場合と同様に，微分方程式は

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\ldots(D - \lambda_n)x = 0$$

と表せる．

$$(D - \lambda)x = 0$$

の解は $x = Ce^{\lambda t}$ であったから，

$$(D - \lambda_1)\{(D - \lambda_2)\ldots(D - \lambda_n)x\} = 0$$

とみると

$$(D-\lambda_2)\dots(D-\lambda_n)x = C_1e^{\lambda_1 t}$$

と表せることが分かる．また，

$$(D-\lambda)x = f(t)$$

の解は

$$x(t) = e^{\lambda t}\left(\int^t e^{-\lambda s}f(s)ds\right)$$

であったから，

$$(D-\lambda_2)\{(D-\lambda_3)\dots(D-\lambda_n)x\} = C_1e^{\lambda_1 t}$$

は

$$\begin{aligned}(D-\lambda_3)\dots(D-\lambda_n)x &= e^{\lambda_2 t}\left(\int^t e^{-\lambda_2 s}C_1e^{\lambda_1 s}ds\right)\\ &= e^{\lambda_2 t}\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}C_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}+C_2\right)\\ &= e^{\lambda_2 t}\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}C_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}+C_2\right)\\ &= \frac{C_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}\end{aligned}$$

となる．ここで，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であることを用いている．定数を取り直して，

$$(D-\lambda_3)\dots(D-\lambda_n)x = C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$$

と表しておく．さらに繰り返すと，

$$(D-\lambda_4)\dots(D-\lambda_n)x = C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+C_3e^{\lambda_3 t}$$

となることが分かる．最終的には，

$$x(t) = C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+\dots+C_ne^{\lambda_n t}$$

となり，一般解が得られた．この形から，微分方程式の解全体の集合を V とすると，$e^{\lambda_1 t},\dots,e^{\lambda_n t}$ が V の基底になることが分かる．

特性方程式の解に虚数が含まれる場合もこのままでよい．例えば，特性方程式の解に虚数があるとその複素共役も特性方程式の解である．例えば，$\lambda_1 = \overline{\lambda}_2 = p+iq$ としよう．すると，$x(t)$ の $C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$ の項を実数で表そうとすると，

$$\begin{aligned}C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t} &= e^{pt}((C_1+C_2)\cos qt + i(C_1-C_2)\sin qt)\\ &= e^{pt}(C_1'\cos qt + C_2'\sin qt)\end{aligned}$$

と表せることは，2 階の場合にやった通りである．

では，特性方程式が重解を含む場合を考えよう．まず，特性方程式が

$$(\lambda-\lambda_1)^n = 0$$

となる場合を考える．微分方程式は

$$(D-\lambda_1)^n x = 0$$

と表せる．まず，

$$(D-\lambda_1)^{n-1}x = C_1 e^{\lambda_1 t}$$

が分かる．

$$(D-\lambda_1)\{(D-\lambda_1)^{n-2}x\} = C_1 e^{\lambda_1 t}$$

とみて解くと，

$$(D-\lambda_1)^{n-2}x = (C_1 t + C_2)e^{\lambda_1 t}$$

が得られる．定数はとり直している．さらに，同様にして，

$$(D-\lambda_1)^{n-3}x = (\frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 t + C_3)e^{\lambda_1 t}$$

となり，この操作を繰り返し，さらに定数を置き直して，一般解は

$$x = (C_1 + C_2 t + \cdots + C_n t^{n-1})e^{\lambda_1 t}$$

と表されることが分かる．

　最後に，一般の場合として特性方程式が

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda-\lambda_m)^{n_m} = 0$$

と表される場合を考えよう．ここで，$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ は全て異なり，$n_1,\ldots,n_m$ は 1 以上の自然数とする．微分方程式は

$$(D-\lambda_1)^{n_1}(D-\lambda_2)^{n_2}\ldots(D-\lambda_m)^{n_m}x = 0 \tag{3.4}$$

と表される．微分作用素は順番を入れ替えても良いから，

$$(D-\lambda_2)^{n_2}\ldots(D-\lambda_m)^{n_m}(D-\lambda_1)^{n_1}x = 0$$

とする．上に述べたことから，

$$(D-\lambda_1)^{n_1}x = 0$$

の解は

$$x = (C_1 + C_2 t + \cdots + C_{n_1} t^{n_1-1})e^{\lambda_1 t}$$

と表される．これは,(3.4) の解にもなっている．従って,(3.4) の一次独立な解 $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}$ が得られた．同様に，

$$(D-\lambda_2)^{n_2}x = 0$$

を満たす解を考えることで，(3.4) の解 $e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{n_2-1}e^{\lambda_2 t}$ が得られる．全てを集めると，(3.4) の n 個の解

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{n_2-1}e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_{n_m} t}, te^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{n_m-1}e^{\lambda_m t}$$

が得られる．この個数は $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ だから全て $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ が実数であれば，特性方程式の次数 n と一致する．従って，これらは V の基底となっている．これらの一次結合により一般解は表せる:

$$x = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_k} C_{kl} t^{l-1} e^{\lambda_k t}.$$

特性方程式に虚数解が含まれる場合を考える．2 階のときと全く同様にして，実数値関数として構成し直すことができる．複素共役の組で現れるので，例えば $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = p + qi, n_1 = n_2$ としよう．すると，

$$C_{1l}t^l e^{\lambda_1 t} + C_{2l}t^l e^{\lambda_2 t} = (C_{1l} + C_{2l})t^l e^{pt}\cos qt + i(C_{1l} - C_{2l})t^l e^{pt}\sin qt$$

となるので，$t^l e^{\lambda_1 t}, t^l e^{\lambda_2 t}$ のかわりに $t^l e^{pt}\cos qt, t^l e^{pt}\sin qt$ を基本解の要素として用いればよい．

まとめると次のようになる．微分方程式

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0$$

について，特性方程式

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

を因数分解して，

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda - \lambda_m)^{n_m} = 0$$

となったとする．実数解 λ_j に対して，解

$$e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \ldots, t^{n_j-1}e^{\lambda_j t}$$

が得られる．互いに複素共役な虚数解の組 $\lambda_k = \overline{\lambda_l} = p + qi (n_k = n_l)$ に対して，解

$$e^{pt}\cos qt, e^{pt}\sin qt, te^{pt}\cos qt, te^{pt}\sin qt, \ldots, t^{n_k-1}e^{pt}\cos qt, t^{n_k-1}e^{pt}\sin qt$$

が得られる．特性方程式の全ての解 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ についてこれらの解を全て集めると n 個の一次独立な解が得られ，その一次結合で一般解は表される．

例 3.5.

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 0$$

の一般解を求める．この特性方程式は

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

であり，因数分解すると

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + i)(\lambda - i) = 0$$

となる．特性方程式の解 *1* に対応する微分方程式の解として e^t, te^t があり，$\pm i$ に対応する解は $\cos t, \sin t$ である．これら *4* つ $e^t, te^t, \cos t, \sin t$ が基本解となる．よって，一般解は

$$x(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3\cos t + C_4\sin t$$

と表される．

なお，特性方程式に重根がある場合は，連立微分方程式に直すと係数行列が対角化できず，ジョルダン標準形にしかできない場合になる．

3.3　連立線形方程式の相図

微分方程式の一般解の振る舞いがおおよそ分かるように，代表的な解の概形を書いた図を相図という．

例えば，連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 x, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y \tag{3.5}$$

で，定数が $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ を満たしているとき，相図は図 3.1 のようになる．また，連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

で，A の固有値 λ_1, λ_2 が $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ を満たしているとき，A を対角化する行列を P とする．P^{-1} により変換すると，(3.5) になる．P により元に戻すと，(3.6) の相図が図 3.2 のように得られる．ここで，U_1, U_2 はそれぞれ λ_1, λ_2 に対応する固有空間である．従って，(3.5) のような基本的な形の解

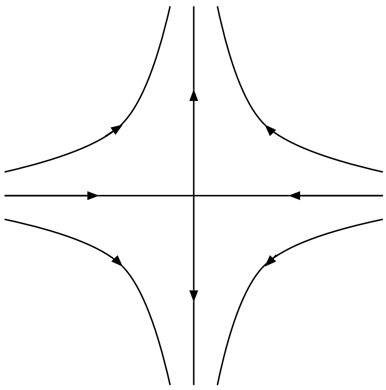

図 3.1

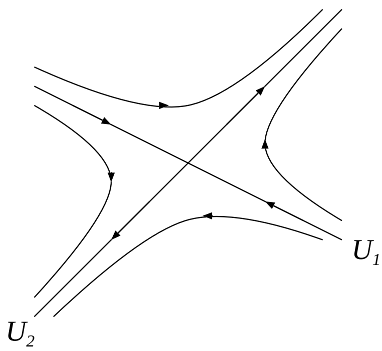

図 3.2

の振る舞いがわかれば，それを線形変換したものとして一般の場合も分かる．

(3.5) で，$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ のときの相図は図 3.3 のようになる．$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ なら矢印が逆向きになる．

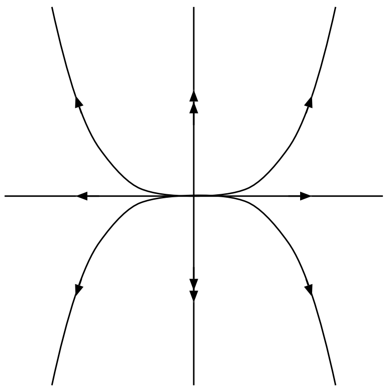

図 3.3

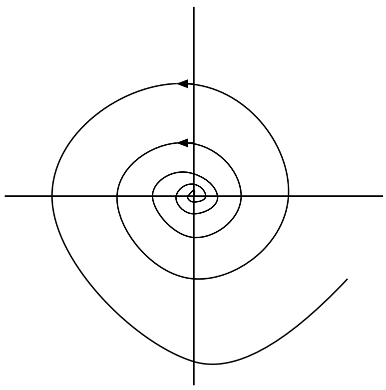

図 3.4

次に複素固有値の場合を考える．複素固有値が現れる場合の行列として，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

がある．この固有値は $p \pm iq$ である．$p > 0, q > 0$ ならこの方程式の相図は図 3.4 のように反時計回りに回りながら原点から離れていく．$p < 0$ なら原点に近づいていく．$q < 0$ なら回る向きが時計回りになる．$p = 0$ で $q > 0$ なら周期的な解になる (図 3.5).

3 次元以上でも同様で，たとえば 3 次元の微分方程式で，固有値の 1 つが負の実数で，残り 2 つが違いに共役な複素数で実部が負なら相図は図 3.6 のようになる．

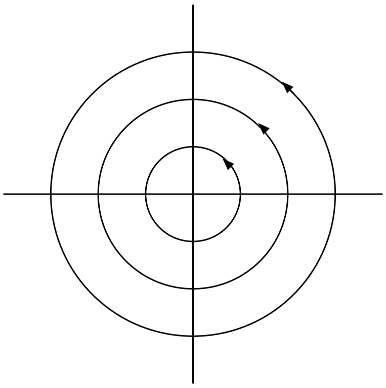

図 3.5

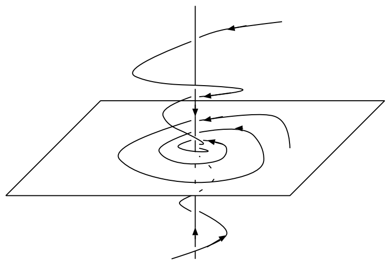

図 3.6

3.4　非線形方程式の平衡点近傍の線形近似

前節まで線形方程式を扱ってきた．非線形方程式を同様に解くことはできない．そこで，初期時間 t_0 に十分近い t での振る舞いや，ある点に近い範囲に解が属するときに，解を近似的に調べることが考えられる．

線形とは限らない自励的な連立微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

を考える．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

とすることで，常微分方程式を

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{3.8}$$

と表すことにする．

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ で $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ である．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$ を満たす点 $\boldsymbol{x}_0$ があるとする．このような点を平衡点という．これに対し，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \neq \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}_0$ を平常点という．

$\boldsymbol{x}_0$ が平常点のとき，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ と表され，$\boldsymbol{x}_0$ の近傍で

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \leq C|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|$$

と評価できる．よって，微分方程式は近似的に

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{b}$$

であるから，近似解 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}(t - t_0) + \boldsymbol{x}_0$ が得られる．

平衡点 $\boldsymbol{x}_0$ に対して，$\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}_0$ は (3.8) の解である．このように，t により変化しない解を定常解という．定常解は最も単純な解である．では，平衡点の近くの解の振る舞いを調べよう．平衡点 $\boldsymbol{x}_0$ は平衡移動すれば原点にできるので，$\boldsymbol{x}_0$ が平衡点であるとする．写像 $\boldsymbol{f}$ は 1 次の項と 2 次以上の項に分解して，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

と表せる．ここで，A は $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{x}_0$ におけるヤコビ行列 $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ で，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ について 2 次以上の項である．つまり，原点付近である定数 C により

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})| \leq C|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2$$

と抑えることができる．

さて，(3.8) は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_0$ として原点付近では $\boldsymbol{g}$ は非常に小さいので無視すると，線形方程式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A\boldsymbol{y} \tag{3.9}$$

が得られる．これを，線形化方程式という．

この線形方程式は，平衡点近傍の解の振る舞いについては，良い近似を与えると期待される．実際，(3.8) の平衡点 $\mathbf{0}$ の近傍の解の振る舞いは，$\boldsymbol{f}$ の $\mathbf{0}$ でのヤコビ行列 A の固有値のどれも純虚数でなければ，線形化方程式 (3.9) の $\mathbf{0}$ の近傍の解の振る舞いと定性的に同じ (正確には位相共役) であることが証明されている (ハートマン-グロブマンの定理)．

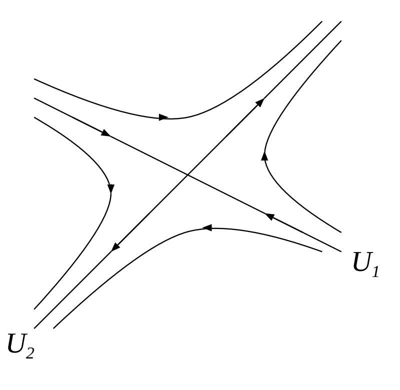

図 3.7

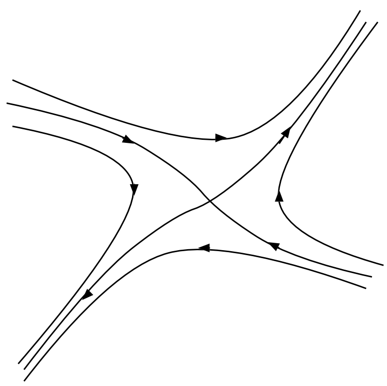

図 3.8

たとえば，線形化方程式の解が図 3.7 のようであれば，もとの非線形方程式の $\mathbf{0}$ 付近の解の振る舞いは図 3.8 のようになる．

例 **3.6.** 振り子の微分方程式

$$\dot{q} = p, \dot{p} = -\frac{g}{l}\sin q$$

を考える．平衡点 $(q,p)=(0,0)$ を中心に線形化すると，

$$\dot{q}=p, \dot{p}=-\frac{g}{l}q$$

となり，この解は

$$q(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t,\quad p(t)=-a\omega\sin\omega t+b\omega\cos\omega t\qquad (\omega=\sqrt{\frac{g}{l}})$$

である．また，平衡点 $(q,p)=(\pi,0)$ を中心に線形化すると，

$$\dot{q}=p, \dot{p}=\frac{g}{l}(q-\pi)$$

となり，この解は

$$q(t)=ce^{\omega t}+de^{-\omega t},\quad p(t)=c\omega e^{\omega t}-d\omega e^{-\omega t}$$

である．

平衡点から離れると非線形項の影響が大きくなり，解の振る舞いは線形近似からはわからなくなる．非線形な微分方程式の大域的な解は多くの場合，カオスと呼ばれる非常に複雑な振る舞いをする．そのような振る舞いを理解しようと研究する分野を力学系理論という．

3.5　変数係数線形微分方程式

■基本解と基本行列　変数係数の線形微分方程式を考える．

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}=&a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n\\
\frac{dx_2}{dt}=&a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\cdots+a_{2n}(t)x_n\\
&\vdots\\
\frac{dx_n}{dt}=&a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n
\end{aligned}$$

を考える．$a_{ij}(t)$ は全て t の関数である．定数係数の場合と同様に，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

とおき，上の連立微分方程式を

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}\tag{3.10}$$

と表すことにする．

一般にはこの形の微分方程式の解を具体的に求めることは困難であるが，解の存在は保障されているので解の性質について調べてみよう．

(3.10) の解の集合は線形空間になり，n 次元である．従って，一次独立になる n 個の解 $\boldsymbol{x}_1(t),\ldots,\boldsymbol{x}_n(t)$ が存在する．このような解の集合を基本解という．これらを横に並べて作った t に依存する n 次正方行列

$$X(t)=(\boldsymbol{x}_1(t)\ \boldsymbol{x}_2(t)\ \ldots\ \boldsymbol{x}_n(t))$$

を (3.10) の基本行列という．

n 個の解 $\boldsymbol{x}_1(t),\dots,\boldsymbol{x}_n(t)$ が一次独立とは，$a_1\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n(t)$ は恒等的に $\mathbf{0}$ となるのは $a_1=\cdots=a_n=0$ の場合に限るということである．従って，ある t について，$a_1\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n(t)$ が $\mathbf{0}$ になることは可能性として考えられる．しかし，それは実際はないことをこれから示す．

(3.10) の n 個の (必ずしも一次独立とは限らない) 解 $\boldsymbol{u}_1(t),\dots,\boldsymbol{u}_n(t)$ が与えられたとき，n 次正方行列 $U(t)=(\boldsymbol{u}_1(t)\ \dots\ \boldsymbol{u}_n(t))$ を考える．$U(t)$ は

$$\frac{dU}{dt}=A(t)U$$

を満たす．$U(t)$ の行列式 $\det U(t)$ を $\boldsymbol{u}_1(t),\dots,\boldsymbol{u}_n(t)$ のロンスキアンという．

定理 3.3. $w(t)=\det U(t)$ とおくと，

$$w(t)=w(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{trace}A(s)ds\right) \tag{3.11}$$

が成り立つ．

証明.

$$\boldsymbol{u}_j(t)=\begin{pmatrix} u_{1j}(t)\\ \vdots \\ u_{nj}(t)\end{pmatrix}$$

とすると，$U(t)=(u_{ij}(t))$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt}=&\det\begin{pmatrix} u'_{11}(t) & \dots & u'_{1n}(t)\\ u_{21}(t) & \dots & u_{2n}(t)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ u_{n1}(t) & \dots & u_{nn}(t)\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} u_{11}(t) & \dots & u_{1n}(t)\\ u'_{21}(t) & \dots & u'_{2n}(t)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ u_{n1}(t) & \dots & u_{nn}(t)\end{pmatrix}\\ &+\cdots+\det\begin{pmatrix} u_{11}(t) & \dots & u_{1n}(t)\\ u_{21}(t) & \dots & u_{2n}(t)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ u'_{n1}(t) & \dots & u'_{nn}(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．この 1 項目を計算してみると，

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} u'_{11}(t) & \dots & u'_{1n}(t)\\ u_{21}(t) & \dots & u_{2n}(t)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ u_{n1}(t) & \dots & u_{nn}(t)\end{pmatrix}&=\det\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}a_{1k}(t)u_{k1}(t) & \dots & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}(t)u_{kn}(t)\\ u_{21}(t) & \dots & u_{2n}(t)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ u_{n1}(t) & \dots & u_{nn}(t)\end{pmatrix}\\ &=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}(t)\det\begin{pmatrix} u_{k1}(t) & \dots & u_{kn}(t)\\ u_{21}(t) & \dots & u_{2n}(t)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ u_{n1}(t) & \dots & u_{nn}(t)\end{pmatrix}\\ &=a_{11}(t)\det\begin{pmatrix} u_{11}(t) & \dots & u_{1n}(t)\\ u_{21}(t) & \dots & u_{2n}(t)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ u_{n1}(t) & \dots & u_{nn}(t)\end{pmatrix}=a_{11}(t)w(t)\end{aligned}$$

となる．他の項も同様であるから，

$$\frac{dw}{dt}(t) = (a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t))w(t) = \mathrm{tr}(A(t))w(t)$$

となる．これを，$w(t)$ に対する微分方程式とみて解くと，(3.11) が得られる． □

$\exp(\dots) > 0$ であるから，ある t_0 で $w(t_0) \neq 0$ なら全ての t で $w(t) \neq 0$ である．つまり，$t = t_0$ で $\boldsymbol{u}_1(t), \dots, \boldsymbol{u}_n(t)$ が一次独立なら，任意の t についても一次独立になるということである．

■**階数低下法**　変数係数の単独線形微分方程式

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^2} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = 0$$

は (3.10) の特別な場合である．この微分方程式も一般には解けないが，特殊解が 1 つ見つかれば階数を減らすことができる．例えば，2 階の場合は特殊解が 1 つ求まれば，1 階の方程式になり，1 階の線形方程式は解けるので一般解を求めることができる．

$$a_2(t)\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = 0$$

について，特殊解 $\varphi(t)$ が求まったとしよう．$x(t) = \varphi(t)y(t)$ と置いて代入すると，

$$\begin{aligned} a_2(\varphi''y + 2\varphi'y' + \varphi y'') + a_1(\varphi'y + \varphi y') + a_0\varphi y &= 0 \\ (a_2\varphi'' + a_1\varphi' + a_0\varphi)y + a_2\varphi y'' + (2a_2\varphi' + a_1\varphi)y' &= 0 \\ a_2\varphi y'' + (2a_2\varphi' + a_1\varphi)y' &= 0 \end{aligned}$$

となり，y' に関する 1 階の方程式だから解くことができる．一般に，n 階の変数係数単独微分方程式は，特殊解が 1 つ求まれば，$n-1$ 階の方程式にできる．

例 **3.7.** 微分方程式

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2(t^2-1)}{t^2+1}\frac{dx}{dt} - \frac{2t}{t^2+1}x = 0$$

は，$x = \frac{t^3}{t^2+1}$ を特殊解として持つ．それを元にして一般解を求めよう．$x = \frac{t^3 y}{t^2+1}$ を代入すると，

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} = 0$$

となる．$z = \frac{dy}{dt}$ とすると，

$$t\frac{dz}{dt} + 4z = 0$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z}\frac{dz}{dt} &= -\frac{4}{t} \\
\int \frac{1}{z}\frac{dz}{dt}dt &= -\int \frac{4}{t}dt \\
\log|z| &= -4\log|t| + C_1 \\
z &= C_2 t^{-4} \\
\frac{dy}{dt} &= C_2 t^{-4} \\
y &= -\frac{1}{3}C_2 t^{-3} + C_3 \\
x &= -\frac{1}{3}C_2\frac{1}{t^2+1} + C_3\frac{t^3}{t^2+1} \\
x &= \frac{c_1}{t^2+1} + \frac{c_2 t^3}{t^2+1}
\end{aligned}
$$

となり，一般解が求まった．

■係数行列が三角行列の場合　他の解ける例として，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}$$

の係数行列 $A(t) = (a_{ij}(t))$ が三角行列の場合がある．$A(t)$ が全ての t で下三角行列であるとする．つまり，$i < j$ なら $a_{ij}(t) = 0$ であるとする．すると，この微分方程式は成分毎に書くと

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 \\
\frac{dx_3}{dt} &= a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3 \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n
\end{aligned}
$$

となる．x_1 に関する微分方程式 $\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1$ は 1 階単独線形微分方程式だから解ける．x_1 を求めた上で x_2 に関する微分方程式 $\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2$ を考えると，x_2 に関する 1 階単独線形微分方程式だから解ける．同様に，x_3 も求まる．これを繰り返して，x_n まで求めることができる．

3.6　非斉次方程式

単独微分方程式が非斉次になった場合

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = f(t) \tag{3.12}$$

を考えよう．この方程式の 1 つの解 $x_0(t)$ が得られたとする．そこで，$x(t) = y(t) + x_0(t)$ とおき微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d^n(y+x_0)}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}(y+x_0)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(y+x_0) &= f(t) \\ \left(\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y\right) + \left(\frac{d^n x_0}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x_0}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x_0\right) &= f(t) \\ \left(\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y\right) + f(t) &= f(t) \\ \frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y &= 0 \end{aligned}$$

つまり，$x = y + x_0$ が (3.12) を満たすためには y が斉次方程式

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0 \tag{3.13}$$

を満たすことが必要十分条件である．(3.13) は前節で解いた通りで，n 個の基本解 $y_1(t), \dots, y_n(t)$ の一次結合により一般解は表される．よって，(3.12) の一般解は

$$x(t) = C_1 y_1(t) + \cdots + C_n y_n(t) + x_0(t)$$

と表される．

従って，非斉次の場合は 1 つ解 x_0 が見つかれば，あとは前節の手法で斉次の一般解を求めればよい．一般解に対して，x_0 のように微分方程式のある 1 つの解のことを，特殊解あるいは特解というのでった．非斉次の方程式の場合，特殊解を求めること問題となるが，まずは方程式を眺めればわかる例を挙げる．

例 3.8.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^{3t}$$

を解く．e^{3t} を左辺に代入するとこの定数倍が出てくるので，$x = \alpha e^{3t}$ の形の解が存在することが予想される．実際，代入してみると

$$9\alpha e^{3t} + 9\alpha e^{3t} + 2\alpha e^{3t} = e^{3t}$$

となるので，$\alpha = \frac{1}{20}$ とすれば解

$$x = \frac{1}{20}e^{3t}$$

が得られる．斉次方程式は前例と同じだから，一般解は

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{20}e^{3t}$$

である．

眺めていても特殊解が見いだせない場合もあるであろう．そのような場合は

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\dots(D-\lambda_n)x = f(t) \tag{3.14}$$

の形で考える．

$$(D-\lambda)x = f(t) \tag{3.15}$$

の解は

$$x = e^{\lambda t} \int^t e^{-\lambda s} f(s) ds$$

であったことを用いて，微分演算子を 1 つずつ外していけばよい．特に特殊解を求めることが重要となる．(3.15) の特殊解は

$$x = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) ds = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds$$

と表される．ここで，たたみこみという関数同士の演算を用いると便利である．2 つの連続関数 $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$F * G(t) = \int_0^t F(t-s) G(s) ds$$

により定義する．これを用いると，(3.15) の特殊解は

$$x = e^{\lambda t} * f$$

と表される．微分演算子を外すことは $e^{\lambda t}$ とのたたみこみをとることに相当するから，(3.14) の特殊解は

$$x = e^{\lambda_1 t} * e^{\lambda_2 t} * \dots e^{\lambda_n t} * f$$

で得られる[*1]．

例 3.9.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = te^t$$

を考えよう．少々眺めていても，特殊解はなかなか見いだせないので，たたみこみで求めよう．

$$(D-1)(D+2)x = te^t$$

と表せるから特殊解は

$$\begin{aligned} x &= e^{-2t} * e^t * te^t = e^{-2t} * \int_0^t e^{t-s} se^s ds = e^{-2t} * e^t \int_0^t s ds = e^{-2t} * \frac{t^2 e^t}{2} = \int_0^t e^{-2(t-s)} \frac{s^2 e^s}{2} ds \\ &= e^{-2t} \int_0^t e^{3s} \frac{s^2}{2} ds = e^{-2t} \left(\frac{1}{3} e^{3t} \frac{t^2}{2} - \frac{1}{3} \int_0^t e^{3s} s ds \right) = e^{-2t} \left(\frac{1}{3} e^{3t} \frac{t^2}{2} - \frac{1}{9} e^{3t} t + \frac{1}{9} \int_0^t e^{3s} ds \right) \\ &= e^{-2t} \left(\frac{1}{3} e^{3t} \frac{t^2}{2} - \frac{1}{9} e^{3t} t + \frac{1}{27} (e^{3t} - 1) \right) = e^t \left(\frac{t^2}{6} - \frac{t}{9} - \frac{1}{27} \right) + \frac{1}{27} e^{-2t} \end{aligned}$$

となる．斉次方程式の基本解は e^t, e^{-2t} であるから，一般解は

$$x = e^t \left(\frac{t^2}{6} - \frac{t}{9} \right) + C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$$

と表すことができる．

[*1] たたみこみの演算は結合法則 $(F * G) * H = F * (G * H)$ を満たすので 3 つ以上のたたみこみに関してカッコをつける必要はない．なお，交換法則 $F * G = G * F$ も満たすので順序の取り方にもよらない．

方程式の形から特殊解が見いだせれば直ちに一般解が求まるが，そうでない場合はこの方法を用いると特殊解，一般解が得られる．

なお，1 階の微分方程式の場合は定数変化法で解くことができるのであった．その 2 階の場合について紹介しよう．

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t) \tag{3.16}$$

を考える．まず，

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=0$$

を解き，この一般解を $y=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$ と表す．$x=\varphi_1(t)y_1(t)+\varphi_2(t)y_2(t)$ としてこの形で解を求めよう．

$$\frac{dx}{dt}=\varphi_1(t)y_1'(t)+\varphi_2(t)y_2'(t)+\varphi_1'(t)y_1(t)+\varphi_2'(t)y_2(t)$$

である．ここで，$\varphi_1'(t)y_1(t)+\varphi_2'(t)y_2(t)=0$ と仮定しておこう．そうすることで以下の計算が楽になるし，またそうしないと条件が少なすぎて φ_1,φ_2 が定まらない．

すると，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi_1(t)y_1''(t)+\varphi_2(t)y_2''(t)+\varphi_1'(t)y_1'(t)+\varphi_2'(t)y_2'(t)$$

となる．これらを，(3.16) に代入すると，

$$\varphi_1'(t)y_1'(t)+\varphi_2'(t)y_2'(t)=f(t)$$

となる．これと，$\varphi_1'(t)y_1(t)+\varphi_2'(t)y_2(t)=0$ を合わせて，φ_1,φ_2 を求めることができる．実際，

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

と表すことができる．これを，

$$\begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

とすることで，$\varphi_1'(t),\varphi_2'(t)$ が求まり，それを積分して $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ が求まる．

ここで，

$$\det\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}\neq 0$$

という条件が必要になる．この右辺は (連立 1 階にしたものの) ロンスキーアンで，$y_1(t),y_2(t)$ が斉次微分方程式の独立な解であれば任意の t で 0 にならない．

なお，1 階の場合と同様に，定数変化法は係数が t に依存する場合にも適用できる．つまり，

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=f(t) \tag{3.17}$$

のように係数 $p(t),q(t)$ が t の関数になっても斉次の方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0$$

の解が (実際にはなかなか求まらないが，もし) 求まれば，上記の方法により (3.17) も解ける．また，n 階の場合にも自然に拡張できる．

■連立微分方程式の場合

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

を考える．A は一定の n 次正方行列とし，$\boldsymbol{b}(t)$ は t に依存する n 次ベクトルとする．斉次にした方程式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A\boldsymbol{y}$$

の解は $\boldsymbol{y}(t) = \exp(tA)\boldsymbol{y}_0$ であるから，$\boldsymbol{\varphi}(t)$ をベクトル値関数として $\boldsymbol{x}(t) = \exp(tA)\boldsymbol{\varphi}(t)$ の形で解を求めよう．すると，

$$\begin{aligned} A\exp(tA)\boldsymbol{\varphi}(t) + \exp(tA)\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}(t) &= A\exp(tA)\boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{b}(t) \\ \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}(t) &= \exp(-tA)\boldsymbol{b}(t) \\ \varphi(t) &= \int^t \exp(-sA)\boldsymbol{b}(s)ds \end{aligned}$$

となる．ここで，ベクトルの積分は各成分を積分することを表す．よって，求める解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp(tA)\int^t \exp(-sA)\boldsymbol{b}(s)ds$$

と表される．初期条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ を課すと，

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_{t_0}^t \exp((t-s)A)\boldsymbol{b}(s)ds + \exp((t-t_0)A)\boldsymbol{x}_0$$

が解になる．

また，変数係数の場合は，$\exp(tA)$ の部分を基本行列にすれば良い．

例 3.10.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon\cos\nu t \end{pmatrix}$$

を解こう．ω, ν は正の定数とする．これは，バネの支点を周期的に動かした時の質点の運動方程式である．$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$ とすると，

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

である．よって，

$$\begin{aligned} \int^t \exp(-sA)\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon\cos\nu t \end{pmatrix} ds &= \int^t \begin{pmatrix} -\varepsilon\sin\omega s\cos\nu s \\ \varepsilon\cos\omega s\cos\nu s \end{pmatrix} ds = \int^t \begin{pmatrix} -\varepsilon\sin\omega s\cos\nu s \\ \varepsilon\cos\omega s\cos\nu s \end{pmatrix} ds \\ &= \int^t \frac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} -\sin(\omega+\nu)s - \sin(\omega-\nu)s \\ \cos(\omega+\nu)s + \cos(\omega-\nu)s \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

となる．この積分は，$\omega \neq \nu$ のとき

$$\frac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega+\nu}\cos(\omega+\nu)t + \frac{1}{\omega-\nu}\cos(\omega-\nu)t \\ \frac{1}{\omega+\nu}\sin(\omega+\nu)t + \frac{1}{\omega-\nu}\sin(\omega-\nu)t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

となり，$\omega = \nu$ のとき

$$\frac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega}\cos 2\omega t \\ \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t + t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

となる．よって，求める解はこれらに $\exp(tA)$ をかけて，$\omega \neq \nu$ のとき

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{\varepsilon\omega}{\omega^2-\nu^2}\cos\nu t \\ -C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t - \frac{\varepsilon\nu}{\omega^2-\nu^2}\sin\nu t \end{pmatrix}$$

で，$\omega = \nu$ のとき

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{\varepsilon t}{2}\sin\omega t \\ -C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t + \frac{\varepsilon t}{2}\cos\omega t \end{pmatrix}$$

となる．

第 4 章

常微分方程式の基本定理

4.1　解の存在と一意性

1 階の連立常微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \tag{4.1}$$

を考える．常微分方程式に初期条件を

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a}$$

と与えたときに，解は存在するか，存在するとすれば一意的かということについて論ずる．

写像 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ が，領域 (連結開集合) $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ で，ある定数 L に対して常に

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, t)| \leq L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \qquad ((\boldsymbol{x}, t) \in D)$$

を満たすとき，$\boldsymbol{f}$ は D で ($\boldsymbol{x}$ について)Lipschitz 条件を満たすという．このとき，L を Lipschitz 定数といい，f は Lipschitz(連続) 関数であるという．Lipschitz 関数は $\boldsymbol{x}$ について連続である．

例えば，V が有界かつ凸で $\boldsymbol{f}$ が $V \times (a, b)(-\infty < a < b < \infty)$ で C^1 級でさらに $\boldsymbol{f}$ の導関数が V の閉包 $\bar{V} \times [a, b]$ でも連続になるようなとき，f は $V \times (a, b)$ で Lipschitz 条件を満たす．なお，集合 V が凸であるとは，V の任意の点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を取ったとき $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を結ぶ線分も V に含まれることをいう．さて，$\boldsymbol{f}$ がこのような関数であれば，Lipschitz 条件を満たすことを確かめておこう．$\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{x}$ に関するヤコビ行列 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ は連続であり，$\bar{V} \times [a, b]$ はコンパクト (有界閉集合である) ので，有界である．$L = \sup_{\boldsymbol{x} \in \bar{V}, t \in [a,b]} |D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)|$ とする．ここで，行列 A に対して，

$$|A| = \sup_{\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}} \frac{|A\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}$$

とおく．いま，L は有限値である．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, t \in (a, b)$ とすると，$\boldsymbol{\varphi}(s) = s\boldsymbol{x} + (1 - s)\boldsymbol{y}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(1), t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(0), t) \\
&= \int_0^1 \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s), t)}{\partial s} ds \\
&= \int_0^1 D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s), t) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(s)}{\partial s} ds \\
&= \int_0^1 D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s), t)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) ds
\end{aligned}$$

となる．よって，

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},t)| &\leq \left|\int_0^1 D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s),t)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})ds\right| \\
&\leq \int_0^1 |D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s),t)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\,ds \\
&\leq \int_0^1 L|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|ds = L|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|
\end{aligned}
$$

となる．

定理 4.1. 常微分方程式 (4.1) について，$\boldsymbol{f}$ が D で *Lipschitz* 条件を満たすとする．$(\boldsymbol{a},t_0)$ が D の内点ならば，ある $\delta>0$ が存在して，$t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$ において (4.1) の初期条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{a}$$

を満たす解 $\boldsymbol{x}(t)$ がただ一つ存在する．

証明　定理 4.1 を Picard の逐次近似法により証明する．$n=1$ の場合のみ考える．一般の n でも本質的に同じである．

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t)$$

で初期条件は

$$x(t_0)=a$$

と表される．

D が長方形領域

$$U=\{(x,t)\mid |x-a|\leq A, |t-t_0|\leq B\}$$

を含み，U における $|f(x,t)|$ の最大値を M とする．

$$\delta=\min\left\{B,\frac{A}{M}\right\}$$

とする．当然，もっと大きくとれることもある．M が大域的に有限値として取れて，A も B もいくらでも大きくとれるのであれば，$\delta=\infty$ としてもよい．

$x(t)$ が微分方程式と初期値を満たすための必要十分条件は積分方程式

$$x(t)=a+\int_{t_0}^t f(x(s),s)ds$$

を満たすことである．この観点をもとに，求める解に収束するような関数の列を構成する．ここでは，添え字を上に書くことにする．帰納的に関数 $x^k(t)$ を構成する．

$$x^0(t)=a, x^1(t)=a+\int_{t_0}^t f(a,s)ds$$

により $x^0(t),x^1(t)$ を定める．さらに，

$$x^2(t)=a+\int_{t_0}^t f(x^1(s),s)ds$$

により $x^2(t)$ を定める．同様に，$x^k(t)$ まで定まったとき

$$x^{k+1}(t) = a + \int_{t_0}^{t} f(x^k(s), s)ds \tag{4.2}$$

により $x^{k+1}(t)$ を定める．そのようにして関数の族 $\{x^k(t)\}$ が定まる．

補題 4.1. $x^k(t)$ は $k \to \infty$ のとき $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上である関数 $x(t)$ に一様収束する．

証明．まず，$|x^k(t) - a| \leq A(t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ であることを示そう．x^0 は満たす．$x^k(t)$ がこの不等式を満たすとすると，

$$|x^{k+1}(t) - a| = \left|\int_{t_0}^{t} f(x^k(s), s)ds\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \left|f(x^k(s), s)\right| ds\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} Mds\right| = M|t - t_0| \leq M\frac{A}{M} = A$$

であるから，$x^{k+1}(t)$ も満たす．よって，帰納法によりすべての $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ において $|x^k(t) - a| \leq A$ はが成り立つ．よって，$t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], k \in \mathbb{N}$ ならば

$$(x^k(t), t) \in U \subset D$$

である．

$t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ について

$$\begin{aligned}
|x^{k+1}(t) - x^k(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(x^k(s), s) - f(x^{k-1}(s), s)ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(x^k(s), s) - f(x^{k-1}(s), s)|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L|x^k(s) - x^{k-1}(s)|ds\right|
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，

$$|x^1(t) - x^0(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(a, s)ds\right| \leq M|t - t_0|$$

をもとに帰納的に $|x^k(t) - x^{k-1}(t)|$ を評価する．

$$\begin{aligned}
|x^2(t) - x^1(t)| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} L|x^1(s) - x^0(s)|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} LM|s - a|ds\right| \\
&\leq \frac{LM}{2}|t - t_0|^2
\end{aligned}$$

となる．さらに，

$$\begin{aligned}
|x^3(t) - x^2(t)| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} L|x^2(s) - x^1(s)|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\frac{LM}{2}|s - t_0|^2\right| \\
&\leq \frac{L^2M}{3!}|t - t_0|^3
\end{aligned}$$

を得る．これを繰り返すことにより，

$$|x^k(t) - x^{k-1}(t)| \leq \frac{L^{k-1}M}{k!}|t - t_0|^k$$

が得られる．これを用いて，$l < m$ に対して，

$$\begin{aligned}|x^m(t) - x^l(t)| &\leq |x^m(t) - x^{m-1}(t)| + |x^{m-1}(t) - x^{m-2}(t)| + \cdots + |x^{l+1}(t) - x^l(t)| \\ &\leq \frac{L^{m-1}M}{m!}|t - t_0|^m + \frac{L^{m-2}M}{(m-1)!}|t - t_0|^{m-1} + \cdots + \frac{L^l M}{(l+1)!}|t - t_0|^{l+1} \\ &\leq \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{L^{k-1}M}{k!}|t - t_0|^k \\ &\leq \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{L^{k-1}M}{k!}\delta^k\end{aligned}$$

が成り立つ．

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{k-1}M}{k!}\delta^k$$

は $\frac{M}{L}e^{L\delta}$ に収束するので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N > 0$ が存在して，$l > N$ ならば

$$0 < \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{L^{k-1}M}{k!}\delta^k = \frac{M}{L}e^{L\delta} - \sum_{k=0}^{l} \frac{L^{k-1}M}{k!}\delta^k < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$m > l > N$ なら

$$|x^m(t) - x^l(t)| < \varepsilon$$

が成り立つ．t は $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ の任意の数だから，$x^k(t)$ はこの区間上である関数 $x(t)$ に一様収束する．
□

(4.2) で $k \to \infty$ とすることで $x(t)$ は

$$x(t) = a + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds$$

を満たす．ここで，f の Lipschitz 連続で，x^k の一様収束するから $f(x^k(s), s)$ の一様収束する．そのことから $\lim_{k\to\infty}$ と $\int_{t_0}^{t}$ の交換可能性，つまり項別積分可能である．$t = t_0$ とすると初期条件を満たすことが分かり，t で微分すると微分方程式を満たすことも分かる．これで，解の存在が示された．

次に，一意性について考える．

補題 4.2. (4.1) の初期条件を定めた解はただ *1* つである．

証明．同じ初期条件を満たす 2 つの解 $x(t), y(t)$ が存在したとする．

$$\begin{aligned}x(t) &= a + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds \\ y(t) &= a + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)ds\end{aligned}$$

が成り立つ．$x(t) - y(t)$ がある $t > t_0$ で 0 ではないと仮定する．そのような t が t_0 より小さいものしか取れない場合も，証明は同様にできる．

$$t_1 = \sup\{s > t_0 \mid x(t) = y(t)(\forall t \in [t_0, s])\}$$

とする．t_1 は有限値として存在する．

$\varepsilon > 0$ を $1/L$ より小さくとり，N を $t_1 < t < t_1 + \varepsilon$ における $|x(t) - y(t)|$ の最大値とする．t_1 の決め方より N は正である．その最大値をとる t に対して

$$\begin{aligned}
N = |x(t) - y(t)| &= \left| \int_{t_1}^{t} f(x(s), s) - f(y(s), s) ds \right| \\
&\leq \int_{t_1}^{t} |f(x(s), s) - f(y(s), s)| ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t} L|x(s) - y(s)| ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t} LN ds \\
&= LN(t - t_1) < LN\varepsilon < N
\end{aligned}$$

となり矛盾する．従って，$|x(t) - y(t)| = 0$ となり，つまり解は一意的である．　□

これで，常微分方程式の解の存在と一意性が示された．解が関数 $x^k(t)$ の極限として得られることに注意していただきたい．$x^k(t)$ から x^{k+1} を得るには積分が必要であったので，無限回の積分操作を行って得られる解と言える．従って，解が具体的な関数として得られるわけではない．解が求まることと，存在することは，別のことである．

例 4.1.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

とし常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

の初期条件

$$x(0) = 0$$

を満たす解を考える．

このような微分方程式は，非正規形の微分方程式を正規形に直した時に現れることがある．実際，この微分方程式は

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^4 - x^2 = 0$$

を正規形にしたものだと考えることができる．

$f(x)$ は連続であるが，*Lipschitz* 条件は満たさない．$t > c$ から $x > 0$ となったとして計算すると

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \int 1 dt \\
2\sqrt{x} &= t - c \\
x &= \frac{1}{4}(t - c)^2
\end{aligned}$$

つまり，

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq c \\ \frac{1}{4}(t - c)^2 & t > c \end{cases}$$

が解になる．$c \geq 0$ はどのようにとっても初期条件を満たす解になるので，解は無限に存在する．このように，局所的に *Lipschitz* 条件を満たさない場合は一意性が成立しない場合がある．

例 4.2. 例 *1.8* で挙げたクレロー方程式

$$x = t\dot{x} - \frac{\dot{x}^2}{2}$$

を考える．これは，

$$\dot{x} = t \pm \sqrt{t^2 - 2x} \tag{4.3}$$

と表せて，前の例と同様に $t^2 - 2x$ 近傍で *Lipschitz* 条件が成り立たない．実際，放物線 $x = \frac{t^2}{2}$ が解でそれに接する直線たちも解であったから，この放物線上の各点を初期値とする解は *2* つある[*1]．

例 4.3. 振り子の運動方程式

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\sin q$$

を考えよう．これらの右辺は，*Lipschitz* 連続であるから，解の存在及び一意性が成立する．

$$E = \frac{1}{2}p^2 - \cos q$$

とおくと，

$$\frac{dE}{dt} = p\dot{p} + (\sin q)\dot{q} = p(-\sin q) + (\sin q)p = 0$$

であるから，解に沿って E は一定である．

$(q, p) = (k\pi, 0)(k \in \mathbb{Z})$ は平衡点である．解の一意性より，この点を通過する解は定常解のみである．$E = 1$ の等高線は，$(-\pi, 0)$ と $(\pi, 0)$ を結ぶ曲線を *2* つ含む．$p > 0$ の部分にあるこの曲線上では $\dot{q} = p > 0$ であるので，この上の解の q 成分は t に関して単調に増加する．その解がある $t_0 \in \mathbb{R}$ で $(\pi, 0)$ に達したとすると，解の一意性に反するので達することはない．$q(t)$ は単調増加し有界であるので，$\lim_{t\to\infty} q(t)$ が存在する．そのとき，$q(t)$ の速さ $p(t)$ は 0 に収束しなければならない．従って，無限の時間をかけて $(\pi, 0)$ に達することになる．すなわち，$\lim_{t\to\infty}(q(t), p(t)) = (\pi, 0)$ である．同様に，$\lim_{t\to-\infty}(q(t), p(t)) = (-\pi, 0)$ である．このように，$t \to \pm\infty$ の極限で別々の平衡点に収束する解をヘテロクリニック軌道といい，力学系理論で重要な軌道である．また，同様にして $p < 0$ の部分にも，$(\pi, 0)$ から $(-\pi, 0)$ へのヘテロクリニック軌道が存在する．

変数分離型

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$$

を振り返ろう．$g(t)$ は連続で，$h(x)$ は Lipschitz 連続であるとする．このとき，

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

として積分するのであった．ここで，$h(x)$ で割ることに対して，$h(x) = 0$ の場合を排除しておかなければならない．初期条件 $x(t_0) = x_0$ を満たす解を考える．$h(x_0) = 0$ とすると，$x(t) \equiv x_0$ が解であると言える．解の一意性よりこの初期条件を満たす解はこれしかない．では $h(x_0) \neq 0$ であるときでも，解 $x(t)$ がある t_1 で $h(x(t_1)) = 0$ となることも考えられる．しかし，もしそうだとすると，$x_1 = x(t_1)$ とすると $x(t) \equiv x_1$ も $x(t_1) = x_1$ を満たす解である．$x(t_1) = x_1$ を初期条件として考え

[*1] 解が複数出てくることは (4.3) が 2 つの方程式からなることに起因するわけではない．この一方の方程式の解を $x(t)$ とすると $x(-t)$ がもう一方の方程式の解になる．したがって，(t, x) 平面に描く直線は縦軸 (x 軸に) 反転したものが現れる．

ると，2 つの解が存在することとなり矛盾する．つまり，$h(x_0) \neq 0$ となる初期条件 $x(t_0) = x_0$ をとったとき，$h(x(t))$ は決して 0 にならない．つまり，$h(x) = 0$ となるのは定常解のみでそれを排除しておけば，$h(x)$ で割ることに対して心配はいらない．

普通に現れる常微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

の多くは，$\boldsymbol{f}$ は C^1 級であろうから，少なくとも局所的には Lipschitz 条件を満たす．つまり，各点 $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ に対し，適当にその近傍 D をとると，D 上で $\boldsymbol{f}$ は Lipshitz 条件を満たす．その場合，その初期値の近傍に $\boldsymbol{f}$ を制限すれば，定理 4.1 の仮定は成立するので，初期条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ を与えたとき，少なくとも t_0 に十分近い t で定まる解 $\boldsymbol{x}(t)$ が存在し，一意的であることが保証される．

局所 Lipschitz 条件だけでは，解が全ての t で存在するかどうかはわからない．自励的で大域的に Lipschitz 条件を満たしていれば，全ての t で解は存在することを示しておこう．これも $n = 1$ の場合で示すが，一般の n でも同様に示せる．$f(x)$ が $\mathbb{R}$ で Lipschitz 条件を満たすとする．定理 4.1 の証明中の A, B は任意に取れる．Lipschitz 条件より

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq L|x| + |f(0)|$$

より $M = AL + |f(0)|$ ととればよい．定理の δ は

$$\min\{B, \frac{A}{AL + |f(0)|}\}$$

ととれる．A を十分大きくとると $\frac{A}{AL+|f(0)|} \geq \frac{1}{2L}$ となり，B は任意だったから，$\delta \geq \frac{1}{2L}$ としてよい．A, B は任意にとってよいから，任意の初期点 (x_0, t_0) に対し，解 $x(t)$ が $[t - \frac{1}{2L}, t + \frac{1}{2L})]$ の範囲で存在する．それは $(x(t + \frac{1}{2L}, t_0 + \frac{1}{2L})$ を初期値とする解でもあるので，$t_0 + \frac{1}{L}$ にまで存在していることがわかる．それを繰り返すと，いくらでも延長できる．

例 4.4.

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

を考える．$f(x) = x^2$ とすると，

$$|f(x) - f(y)| = |x + y||x - y|$$

であり $|x+y|$ はいくらでも大きくなるので $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体では *Lipschitz* 条件を満たさない．しかし，x の範囲を $[p, q]$ に限定すると，$f(x)$ は *Lipschitz* 条件を満たす．*Lipschitz* 定数は $L = 2\max\{|p|, |q|\}$ である．従って，初期条件 $x(t_0) = a \in (p, q)$ と定める．解 $x(t)$ は $t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$ の範囲で存在する．

実際にこの微分方程式を解いてみよう．$a = 0$ の場合は $x(t) = 0$ が解となるから，$a \neq 0$ とすると

$$\int_a^x x^{-2} dx = \int_{t_0}^t 1 dt$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{a} = t - t_0$$

$$x(t) = \frac{a}{1 - at + at_0}$$

よって，$a > 0$ の場合，解は $t < a^{-1} + t_0$ の範囲で存在する．$t \to a^{-1} + t_0 - 0$ のとき $x(t) \to +\infty$ となる．

同様に，$a < 0$ の場合，解は $t > a^{-1} + t_0$ の範囲で存在し，$t \to a^{-1} + t_0 + 0$ のとき $x(t) \to -\infty$ となる．

限られた t の範囲では解の存在と一意性が成立しているが，この例のように全体では *Lipschitz* 条件を満たさないと，一部の t でしか解が定まらないことがある．

なお，応用上，$\boldsymbol{f}$ は C^1 級である場合が多いが，近年は不連続な関数 $\boldsymbol{f}$ を扱うスイッチングを含む系やハイブリッドと呼ばれる系の重要性も高まっている．

4.2　初期値に関する依存性

常微分方程式の初期値を変化させたときに解の変化の仕方について触れておく．

常微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

の初期条件

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}$$

を満たす解を

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}, t_0, t)$$

と書くことにする．

定理 4.2. $\boldsymbol{f}$ は *Lipschitz* 連続であるとする．このとき，$\boldsymbol{\varphi}$ は $(\boldsymbol{\xi}, t_0, t)$ に関して連続である．

補題として次を示しておく．

補題 4.3 (Gronwall の不等式)**.** $\psi(t), p(t)$ を $t \in [a, b]$ で定義された関数とし，$p(t) \geq 0$ と

$$0 \leq \psi(t) \leq C + \int_a^t p(s)\psi(s)ds$$

を満たすとする．このとき，$t \in [a, b]$ で

$$0 \leq \psi(t) \leq C \exp\left(\int_a^t p(s)ds\right)$$

が成り立つ．

証明

$$\zeta(t) = C + \int_a^t p(s)\psi(s)ds$$

とおくと，

$$\zeta'(t) = p(t)\psi(t) \leq p(t)\zeta(t)$$

が成り立つ．よって，

$$\frac{d}{dt}\left(\zeta(t)\exp\left(-\int_a^t p(s)ds\right)\right) = \left(\zeta'(t) + \zeta(t)\left(-p(t)\right)\right)\exp\left(-\int_a^t p(s)ds\right) \leq 0$$

が成り立つ．よって，

$$\zeta(a)\exp\left(-\int_a^a p(s)ds\right) \geq \zeta(t)\exp\left(-\int_a^t p(s)ds\right)$$

すなわち，

$$\zeta(t) \leq \zeta(a) \exp\left(\int_a^t p(s)ds\right)$$

$\zeta(a) = C$ であるから

$$0 \leq \psi(t) \leq \zeta(t) \leq C\exp\left(\int_a^t p(s)ds\right)$$

が成り立つ．□

定理 4.2 の証明　簡単のため $n=1, x \in \mathbb{R}$ の場合を示す．一般の n の場合も全く同様である．$\varphi(\xi, t_0, t)$ は t に関しては微分可能で連続であるから，ξ, t_0 に関する連続性を示せば良い．ξ, t_0 を固定し，ξ', t_0' をその任意の点とする．φ は

$$\varphi(\xi, t_0, t) = \xi + \int_{t_0}^t f(\varphi(\xi, t_0, s), s)ds$$

を満たすから，

$$\begin{aligned}|\varphi(\xi, t_0, t) - \varphi(\xi', t_0', t)| &= \left|(\xi - \xi') + \int_{t_0}^t f(\varphi(\xi, t_0, s), s)ds - \int_{t_0'}^t f(\varphi(\xi', t_0', s), s)ds\right| \\ &\leq |\xi - \xi'| + \left|\int_{t_0}^{t_0'} f(\varphi(\xi, t_0, s), s)ds\right| + \left|\int_{t_0'}^t f(\varphi(\xi, t_0, s), s) - f(\varphi(\xi', t_0', s), s)ds\right|\end{aligned}$$

となる．$\varepsilon > 0$ を任意にとったとき，ξ と ξ'，t_0 と t_0' を十分近く取ると，

$$|\xi - \xi'| + \left|\int_{t_0}^{t_0'} f(\varphi(\xi, t_0, s), s)ds\right| < \varepsilon$$

が成り立つ．また，Lipschitz 条件より

$$|f(\varphi(\xi, t_0, s), s) - f(\varphi(\xi', t_0', s), s)| \leq L|\varphi(\xi, t_0, s) - \varphi(\xi', t_0', s)|$$

がなりたつ．従って，$t \geq t_0$ とすると

$$|\varphi(\xi, t_0, t) - \varphi(\xi', t_0', t)| \leq \varepsilon + L\int_{t_0'}^t |\varphi(\xi, t_0, s) - \varphi(\xi', t_0', s)|ds$$

となる．Gronwall の不等式より，

$$|\varphi(\xi, t_0, t) - \varphi(\xi', t_0', t)| \leq \varepsilon \exp\left(L(t - t_0')\right)$$

が成り立つ．これで，φ が (ξ, t_0, t) において $((\xi, t_0)$ について$)$ 連続であることが示せた．$t < t_0$ の場合は，t を $-\tau$ に置き直して，

$$\frac{dx}{d\tau} = -f(x, -\tau)$$

を考えればよい．□

さらに，$\boldsymbol{f}$ が C^r 級であれば，$\boldsymbol{\varphi}$ は $(\boldsymbol{\xi}, t_0, t)$ に関して C^r 級であることも示せる ([3] の第 2 章参照).

φ の連続性から次のようなことがいえる．$t, t_0 \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n$ を任意にとり固定しておく．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$|\eta - \xi| < \delta$ ならば $|\varphi(\eta, t_0, t) - \varphi(\xi, t_0, t)| < \varepsilon$ が成り立つ．

これに一見反するように見えるかもしれないが，解が以下のような性質をもつ微分方程式も存在する．

定義 4.1. 微分方程式 *(力学系)* が初期値に関する敏感な依存性を持つとは，ある $C > 0$ が存在して，任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ と任意の $t_0 \in \mathbb{R}$ と任意の $\delta > 0$ に対して，$|\eta-\xi| < \delta$ かつ $|\varphi(\eta, t_0, t)-\varphi(\xi, t_0, t)| > C$ をみたす $\eta \in \mathbb{R}^n$ と $t \in \mathbb{R}$ が存在することをいう．

例 1.5 で挙げたローレンツ方程式はこの性質をもつ．ただし，

$$\frac{dx}{dt} = x$$

のような微分方程式では，解 $\varphi(\xi, t_0, t) = \xi e^{(t-t_0)}$ のように解は単純だが，$\eta \neq \xi$ なら t を十分大きく取ると

$$|\varphi(\eta, t_0, t) - \varphi(\xi, t_0, t)| = |\eta - \xi| e^{(t-t_0)} > 1$$

となり，初期値に関する敏感な依存性をもつ．カオスと呼ばれている複雑なシステムが持つ性質は，初期値に関する敏感な依存性をもちさらに軌道に多様性があるようなものをいう．そのようなカオス的な微分方程式を調べる分野を力学系理論という．

4.3 パラメータを持つ微分方程式

様々なモデルに基づいて作られた微分方程式は，パラメータを持つ場合が多い．パラメータに応じて微分方程式の解がどのように変化するのかというのは興味深い問題である．

ここでも，一般の $\mathbb{R}^n$ 上の微分方程式でも成立することだが，$n = 1$ の場合に限定して話を進める．パラメータ $\mu \in \mathbb{R}$ をもつ微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t; \mu)$$

を考える．初期条件 $x(t_0) = x_0$ を仮定する．この初期条件を満たす解を，$\varphi(t; \mu)$ と表す．$t \in [a, b]$ の範囲でこの初期値を持つ解が存在するとする．

定理 4.3. 各 μ について f は *Lipschitz* 条件を満たすとし，$f(x, t; \mu)$ は $\mu \to \mu_0$ のとき $f(x, t; \mu_0)$ に $t \in [a, b]$ で一様収束するとする．このとき，$\varphi(t; \mu)$ も $\mu \to \mu_0$ のとき $\varphi(t; \mu_0)$ に $[a, b]$ で一様収束する．

証明

$$\varphi(t; \mu) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(s; \mu), s; \mu) ds$$

より $t \geq t_0$ とすると

$$\begin{aligned}
|\varphi(t; \mu) - \varphi(t; \mu_0)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(\varphi(s; \mu), s; \mu) - f(\varphi(s; \mu_0), s; \mu_0)| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(\varphi(s; \mu), s; \mu) - f(\varphi(s; \mu), s; \mu_0)| ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} |f(\varphi(s; \mu), s; \mu_0) - f(\varphi(s; \mu_0), s; \mu_0)| ds
\end{aligned}$$

ここで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，μ を μ_0 に十分近くとると f の一様収束性より

$$|f(\varphi(s; \mu), s; \mu) - f(\varphi(s; \mu), s; \mu_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ．また，Lipschitz 条件より

$$\int_{t_0}^{t} |f(\varphi(s;\mu),s;\mu_0) - f(\varphi(s;\mu_0),s;\mu_0)|ds \le L\int_{t_0}^{t} |\varphi(s;\mu) - \varphi(s;\mu_0)|ds$$

が成り立つ．以上より，

$$|\varphi(t;\mu) - \varphi(t;\mu_0)| \le \varepsilon(b-a) + L\int_{t_0}^{t} |\varphi(s;\mu) - \varphi(s;\mu_0)|ds$$

が成り立つ．Gronwall の不等式より，

$$|\varphi(t;\mu) - \varphi(t;\mu_0)| \le \varepsilon(b-a)\exp(L(t-t_0)) \le \varepsilon \exp(L(b-t_0))$$

が成り立つ．故に，$\varphi(t;\mu)$ は $\mu \to \mu_0$ のとき $\varphi(t;\mu_0)$ に $[a,b]$ 上で一様収束する． □

上の定理では，$\varphi(t;\mu)$ が全ての t で定義できているとしても，t の範囲を有界閉区間 $[a,b]$ に制限すると一様収束であるということだから，$\mathbb{R}$ 上では広義一様収束であることを意味する．このことは，$\mathbb{R}$ 上で一様収束性は一般には成立せず，そのことが $t \to \infty$ での解の振る舞いが μ により大きく変わりうることを意味する．

例 4.5. 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -\mu, \quad x(0) = 100$$

の解 $x(t;\mu)$ を考えよう．*100* リットルの水が入った容器に小さな穴を空けて，*1* 秒間に μ リットルずつ水が流れ出ているとする．$\mu = 0$ なら $x(t;0) = 100$ であるが，どんなに $\mu > 0$ が小さくても $x(T;\mu) = 0$ となる T が存在する．つまり，十分 $\mu > 0$ を小さく取っても全ての t で $|x(t;\mu) - x(t;0)| < 1$ となるようにはできないので，$\mathbb{R}$ では一様収束ではない．上の定理より，t の範囲を $[a,b]$ にすればこの上では一様収束である．

例 4.6.

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + \mu y$$

の平衡点 $(0,0)$ 以外の解 $(x(t),y(t))$ は $\mu > 0$ では $t \to \infty$ で回転しながら発散し，$\mu = 0$ ではすべて周期解，$\mu < 0$ では $t \to \infty$ で回転しながら原点に収束する．有界閉区間 $[a,b]$ における解の振る舞いのみをみていては μ のオーダーでしか違いはないが，$t \to \infty$ での振る舞いは μ により大きく変わる．このような現象を詳しく調べる分野を分岐理論という．

4.4　解析的微分方程式

常微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$$

について，$\boldsymbol{f}$ が実解析的ならば $\varphi(\xi,t_0,t)$ も実解析的になる．とくに，$\boldsymbol{f}$ が複素数の範囲でも正則関数として意味をもつならば，解 $\varphi(\xi,t_0,t)$ も正則関数になる．t も複素数としてみることとなるので，複素微分方程式としてみるときは独立変数を $z \in \mathbb{C}$ と表し微分方程式を

$$\frac{dw}{dz} = f(w,z)$$

と表すことが多い．

ただし，微分方程式が特異点を持っていると，解は多価関数になることがよくある．例えば

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\alpha}{1+z} w$$

の解は $w = c(1+z)^\alpha$ である．$c \in \mathbb{C}$ は未定の定数である．初期条件を $w(0) = w_0$ とすると解は $w(z) = w_0(1+z)^\alpha$ で主値をとったものである．z が 0 から連続的に変化し -1 を反時計回りに回って元の 0 に戻るとこの値は $e^{2\pi i\alpha} w_0$ になる．つまり，z が同じ値でも多くの値を取りうる．また，線形変換 $w_0 \mapsto e^{2\pi i\alpha} w_0$ が得られる．

例えば，

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)} \frac{dw}{dz} - \frac{ab}{z(1-z)} w = 0$$

を考えよう．これを超幾何微分方程式という．これは，線形だが係数が z に依存するので，これまで学んだ方法で解くことはできない．$z_0 \neq 0, 1$ に対して $w(z_0) = \xi_1, \frac{dw}{dz}(z_0) = \xi_2$ をみたす解を $(w(z), \frac{dw}{dz}(z)) = \varphi(\xi_1, \xi_2, z_0, z)$ と表す．φ は $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}, z_0, z \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ に解析的に拡張できる．しかし，後で見るように多価関数である．

微分方程式が線形であることから，z_0, z を固定したとき (ξ_1, ξ_2) を $\varphi(\xi_1, \xi_2, z_0, z)$ に移す変換は $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ への線形変換である．φ の多価性を考えよう．$z = 0, 1$ は特異点になるが，z は複素数で考えることができるので，虚数方向に避けて拡張することができる．$z_0 = \frac{1}{2}$ とし z は 0 を反時計回りに回って $\frac{1}{2}$ に戻るとすると $\varphi(\xi_1, \xi_2, z_0, z)$ に対応する線形変換は行列

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i c} \end{pmatrix}$$

で表される．同様に 1 を反時計回りに回った変換は

$$M_1 = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(c-a-b)} \end{pmatrix} P$$

である．P がガンマ関数を用いて

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} & \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \\ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} & \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} \end{pmatrix}$$

と表される．M_0, M_1 ような行列をモノドロミー行列という．実は，モノドロミー行列の性質が，微分方程式が解けるかどうかと大きく関わっている．

このように，特異点の性質がよい解析的な微分方程式は可積分系と呼ばれる分野で詳しく研究されている．パンルヴェ方程式と呼ばれる方程式などが有名である．

付録 A

原始関数の計算

微分方程式を解くには，積分計算が必要になる場合が多い．原始関数の求め方について以下にまとめておく．

■有理関数の原始関数 $f(x), g(x)$ が多項式のとき，$\frac{g(x)}{f(x)}$ を有理関数という．この節ではまず，一般の有理関数を積分することを目指す．

$g(x)$ が $f(x)$ より次数が高いときは，割り算することにより，

$$\frac{g(x)}{f(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{f(x)}$$

の形にすることができる．$p(x)$ と $r(x)$ も多項式で，$r(x)$ は $f(x)$ より次数が低い．$p(x)$ の部分は多項式だから積分できるので，$\frac{r(x)}{f(x)}$ の部分が積分できれば良い．この部分は，部分分数展開という操作をすることにより，積分可能な形になる．一般論を述べる前に，いくつかの具体例を計算してみよう．

例 **A.1.**

$$\frac{x^4+1}{x^3-x}$$

の原始関数 *(*不定積分*)* を求めよう．割り算をすると，

$$\frac{x^4+1}{x^3-x} = x + \frac{x^2+1}{x^3-x} = x + \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}$$

と表すことができる．$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}$ を部分分数展開すると，

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

の形に表すことができる．これが恒等式になるような定数 a, b, c を求める．分母をはらうと，

$$\begin{aligned} x^2+1 =& a(x-1)(x+1) + bx(x+1) + cx(x-1) \\ =& (a+b+c)x^2 + (b-c)x - a. \end{aligned}$$

これが恒等的に成立するには，$a+b+c=1, b-c=0, -a=1$ でないといけないから，$a=-1, b=c=1$ が得られる．従って，求める原始関数

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+1}{x^3-x}dx &= \int x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \log|x| + \log|x-1| + \log|x+1| + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \log\left|\frac{x^2-1}{x}\right| + C \end{aligned}$$

である．

例 **A.2.**

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$$

の原始関数を求めよう．このように分母に二乗がある場合の部分分数展開は

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$$

の形になる．分母をはらうと，

$$\begin{aligned} x+1 &= a(x+2) + b(x-1)(x+2) + c(x-1)^2 \\ &= (b+c)x^2 + (a+b-2c)x + (2a-2b+c) \end{aligned}$$

となる．恒等的に成立するには，$b+c=0, a+b-2c=1, 2a-2b+c=1$ であるから，$a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{9}, c=-\frac{1}{9}$ が得られる．従って，

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{9}\left(\frac{6}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$$

となる．故に求める原始関数は

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx &= \frac{1}{9}\int \frac{6}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}dx \\ &= \frac{1}{9}\left(-\frac{6}{x-1} + \log|x-1| - \log|x+2|\right) + C \\ &= \frac{1}{9}\left(-\frac{6}{x-1} + \log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right) + C \end{aligned}$$

である．

例 **A.3.**

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$$

の原始関数を求めよう．x^2+1 のように実数の範囲ではこれ以上因数分解できない因数を分母が含む場合には，部分分数展開は

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}$$

の形になる．前と同様に分母を払って a, b, c を求めると，

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+1}\right)$$

となる．求める原始関数は，

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + C \end{aligned}$$

である．

例 **A.4.**

$$\frac{1}{x^3+1}$$

の原始関数を求めよう．分母を因数分解すると

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

となりこれ以上は因数分解できない．従って，$\frac{1}{x^3+1}$ の部分分数展開は

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

となる．同様に分母を払って計算すると a,b,c を求めると,

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$$

となる．この原始関数を求めたい訳だが, 右辺の第 *2* 項がちょっと大変である．

$$\begin{aligned}
\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx &= \int\frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \\
&= \int\frac{y-\frac{3}{2}}{y^2+\frac{3}{4}}dy && \left(x=y+\frac{1}{2}\right) \\
&= \int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}z-\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}z^2+\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}dz && \left(y=\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \\
&= \int\frac{z-\sqrt{3}}{z^2+1}dz \\
&= \frac{1}{2}\log(z^2+1)-\sqrt{3}\arctan z+C \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right)-\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}(x^2-x+1)\right)-\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}-\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

故に, 求めたい原始関数は

$$\int\frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$$

と求まる[*1].

例 **A.5.**

$$\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

[*1] $\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}$ の部分は定数だから消した.

の原始関数を求めよう．これは，すでに部分分数展開された式である．この積分には少し工夫がいる．

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx &= \int \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^2}dx \\
&= \int \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx \\
&= \arctan x - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\cdot xdx \\
&= \arctan x - \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\cdot x - \int -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}dx\right) + C \qquad \text{(部分積分)} \\
&= \arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\arctan x + C \\
&= \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + C
\end{aligned}$$

と求まる．すなわち，$\frac{1}{x^2+1}$ の積分に帰着されている．一般に，$F_k(x) = \int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}$ は部分積分を用いると $F_{k-1}(x)$ を用いて表すことができるので，この形の原始関数は帰納的に求めることができる．

以上のように，一般に有理関数 $\frac{g(x)}{f(x)}$ は部分分数展開できる．すなわち，$\frac{g(x)}{f(x)}$ は，

$$\text{多項式}, \quad \frac{\beta}{(x-\alpha)^n}, \quad \frac{\gamma x+\delta}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}$$

の形の式の和で表すことができる．ここで，$(x-\alpha)^n$, $((x-\alpha)^2+\beta^2)^k$ は $f(x)$ を割り切るもの全てである．

■三角関数の有理関数 三角関数の有理関数の原始関数を求めよう．一般に $\cos x, \sin x$ の有理関数の積分は，$t = \tan\frac{x}{2}$ により置換積分することで，t の有理関数の積分に帰着される．

例 **A.6.**

$$\frac{1}{\sin x}$$

の原始関数を求めよう．$t = \tan\frac{x}{2}$ により置換積分すると，$dt = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{t^2+1}{2}dx$ だから

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x}dx &= \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{t^2+1}dt \\
&= \int \frac{1}{t}dt = \log|t| = \log|\tan\frac{x}{2}|
\end{aligned}$$

例 **A.7.**

$$\frac{1}{\cos^4 x}$$

の原始関数を求めよう．このように，$\sin^2 x, \cos^2 x$ の式で表されている場合は，$t = \tan\frac{x}{2}$ でももちろん可能であるが，$t = \tan x$ により置換積分する方が簡単である．$dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$ だから $dx = \frac{1}{t^2+1}dt$ である．

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int (t^2+1)^2\cdot\frac{1}{t^2+1}dt \\
&= \int t^2+1dt \\
&= \frac{1}{3}t^3+t+C \\
&= \frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C
\end{aligned}$$

それ以外の関数の原始関数を求めるための一般的な方法はそれほどないが，いくつかのパターンはある．

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ は $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ により置換積分すると，有理関数の積分に帰着できる．

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ は，$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{a}x$ とおくと有理関数の積分に帰着できる（$\pm$ はどちらでもよい）．

例 A.8.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

の原始関数を求めよう．$\sqrt{x^2+a} + x = t$ とおくと，

$$x = \frac{t^2-a}{2t}, \quad \sqrt{x^2+a} = \frac{t^2+a}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+a}{2t^2}dt$$

であるから，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \int \frac{2t}{t^2+a}\frac{t^2+a}{2t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C = \log|\sqrt{x^2+a}+x| + C.$$

高校数学で学んだ方法や被積分関数が以上に述べた形でない場合は，まとまった方法はなく関数によって方法を考えるしかない．

例 A.9.

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x^n}}$$

の原始関数を求めよう．$t = \sqrt{1+x^n}$ とおくと，$nx^{n-1}dx = 2tdt$ だから，

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^n}} &= \int \frac{x^{n-1}dx}{x^n\sqrt{1+x^n}} = \int \frac{2tdt}{n(t^2-1)t} = \frac{1}{n}\int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}dt \\ &= \frac{1}{n}(\log|t-1| - \log|t+1|) + C = \frac{1}{n}\log\left|\frac{\sqrt{1+x^n}-1}{\sqrt{1+x^n}+1}\right| + C\end{aligned}$$

例 A.10.

$$e^x\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$$

の原始関数を求めよう．

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\frac{1}{x+1}\right) = e^x\frac{x}{(x+1)^2}$$

だから，

$$\begin{aligned}\int e^x\frac{x^2+1}{(x+1)^2}dx &= \int e^x\frac{(x+1)^2-2x}{(x+1)^2}dx = \int e^x\frac{(x+1)^2-2x}{(x+1)^2}dx \\ &= \int e^x dx - 2\int e^x\frac{x}{(x+1)^2}dx = e^x - 2e^x\frac{1}{x+1} + C = e^x\frac{x-1}{x+1} + C\end{aligned}$$

どのような関数の原始関数でもこのように具体的に求まる訳ではない．平方根の中に 3 次式以上の多項式が入っている場合は，一般には初等関数（多項式，三角関数，$e^x, \log x$）やその逆関数を用いて表すことができない場合がほとんどである．たとえば，

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (z = \sin\varphi)$$

は楕円積分と呼ばれるものの一種で，定数 k が $0, \pm 1$ でない場合は初等関数で表すことができないことが知られている．

演習問題

問題 1. 微分方程式 (1.3) を尺度変換によりできるだけ簡単にせよ *(*できるだけ多くの定数を *1* にせよ*)*. 本質的に *1* にできない定数は何個になるか答えよ.

問題 2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= \frac{(x-1)^2(x^2+1)}{x^2} \\ x(0) &= 2 \end{cases}$$

の解について x と t の関係式を求めよ. $x = ($$t$ の関数*)* の形までしなくてよいが, 積分を含んではいけない.

問題 3.

$$\frac{dx}{dt} = e^{at+bx}$$

の一般解を求めよ. ただし，a, b は 0 でない定数である.

問題 4.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= (e^x + e^{-x})t \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

を解け.

問題 5.

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{1}{t}\frac{d^2x}{dt^2}\left(1 - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0$$

を解け *(*ヒント*:*例 *1.7* に倣って，微分方程式の階数を下げよ*)*.

問題 6.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= a + \frac{x}{t} + \cos\frac{x}{t} \\ x(1) &= 0 \end{cases}$$

を解け. t は正の範囲でよい. $a > 1$ は定数.

問題 7.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t - 2x + 3}{2t + x - 4}$$

の一般解を求めよ *(*ヒント*:*これは同次形ではないが，x, t を適当に平行移動すると同次形になる*)*.

問題 8.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{tx}{t^2 + x}$$

の一般解を求めよ *(*ヒント*:* $f(x,t) = \frac{tx}{t^2+x}$ は $f(\lambda^2 x, \lambda t) = \lambda f(x,t)$ を満たす*)*.

問題 9.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3xy + 2y^2}{2x^2 + 3xy}$$

を全微分方程式にして保存量を求めよ.

問題 10. 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3y - y^4}{x^4 - 2xy^3}$$

を全微分方程式にして保存量を求めよ *(この解はデカルトの正葉線と呼ばれるものになる)*.

問題 11.

$$\frac{dx}{dt} + x = e^t$$

の一般解を求めよ.

問題 12.

$$\frac{dx}{dt} + 2tx = te^{-t^2}$$

の一般解を求めよ.

問題 13 (一般化 Lotka-Volterra 方程式の保存量)**.** n 種の生物のモデルとして,

$$\frac{du_j}{dt} = \varepsilon_j u_j + \frac{1}{\beta_j}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}u_j u_k \quad (j = 1, \ldots, n)$$

がある. $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ とし,

$$\varepsilon_j\beta_j + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}c_k = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

となる c_k が存在するとする. このとき,

$$G = \sum_{j=1}^{n}\beta_j(u_j - c_j\log u_j)$$

は各解に沿って一定であることを示せ.

問題 14. 非正規方程式

$$x = t\frac{dx}{dt}\left(\frac{dx}{dt} + 1\right) + \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

を以下を参考にして解け．

1. *1.3* 節で述べたように，$p = \frac{dx}{dt}$ とおき，式全体を t で微分することにより，p に関する正規系の方程式にする．
2. t を独立変数，p を未知関数とする微分方程式だが，$p(t)$ の逆関数 $t(p)$ に関する微分方程式にする．つまり，p を独立変数，t を未知関数とする微分方程式とする．すると，線形の微分方程式になる．
3. それを定数変化法で解く．

問題 15.

$$x = t\frac{dx}{dt} + t + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

の一般解を求めよ．

問題 16.

$$\frac{dx}{dt} + tx = tx^3$$

を *(*変数分離形でもあるが*)* ベルヌーイの方程式の解法で解け．

問題 17. 全微分方程式

$$\{p(x) + q(y)\}dx + \{r(x) + s(y)\}dy = 0$$

が完全形になるための必要十分条件を求めよ．また，完全形であるときにその一般解を求めよ．

問題 18. $A = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$ とする．常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

を解け．

問題 19. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする．常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

を解け．

問題 20. $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ とする．常微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

の一般解を実数値関数として表示せよ．

問題 21. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ とする．常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

を解け．

問題 22.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

の一般解を求めよ．

問題 23.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$$

の一般解を求めよ．

問題 24. 空気抵抗がある *(*線形化した*)* 振り子

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x = 0$$

を考える．$k > 0$ は定数である．空気抵抗により $x = 0$ に漸近するが，どのように漸近していくか？

問題 25.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

の一般解を求めよ．

問題 26.

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 5\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} - 4x = 0$$

の一般解を求めよ．

問題 27.

$$\frac{d^nx}{dt^n} - x = 0$$

の一般解を求めよ．

問題 28.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=4$$

を解け.

問題 29.

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=2t-3$$

の一般解を求めよ.

問題 30.

$$\frac{dx}{dt}-x=e^{2t}$$

の一般解を求めよ.

問題 31.

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=e^{t}$$

の一般解を求めよ.

問題 32. a は $0<a<\frac{1}{4}$ を満たす定数とする．$x(t)$ を

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{a}{t^2}x$$

の解とするとき

$$\lim_{t\to+0}x(t)=0$$

が成り立つことを示せ.

問題 33. $a\neq 0$ を定数とし，$p(t)$ をある $T>0$ が存在して任意の t について

$$p(t+T)=p(t)$$

を満たす関数とする．このとき，微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=ax+p(t)$$

の解 $x(t)$ で

$$x(t+T)=x(t)$$

を満たすものがただ一つ存在することを示せ.

問題 34. p を正の実数とし，$f(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数で，

$$\int_0^\infty |f(t)|dt<\infty$$

を満たすものとする．このとき，$\mathbb{R}$ 上の常微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=-px+f(t)$$

の任意の解 $x(t)$ に対し，

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$$

が成り立つことを示せ.

問題 35.

$$\frac{dx}{dt} = (x+1)x(x-1)(x-2), \quad x(0) = a$$

の解 $x(t)$ について，$\lim_{t\to\infty} x(t)$ が存在すれば，それを求めよ．

問題 36. $a > 0$ を定数とし微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = |x|^a, \quad x(0) = 0$$

を考える．解が一意的になるような a の範囲を求めよ．

問題 37. 次の写像はそれぞれ与えられた定義域全体で *Lipschitz* 条件を満たすか？

1. $y = x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$
2. $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2)$
3. $y = \sqrt{x_1^2 - x_2^2} \quad (x_1^2 \geq x_2^2)$
4. $y = \begin{cases} x \log x & (0 < x \leq 1) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$
5. $y = x^2 \quad (|x| \leq 1, x \in \mathbb{C})$

問題 38. 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \quad x(t_0) = a$$

の解の存在は，

$$x^1(t) = a + \int_{t_0}^{t} f(a,s)ds, \quad x^{k+1}(t) = a + \int_{t_0}^{t} f(x^k(s), s)ds$$

として定まる関数の列 $x^k(t)$ の極限 $\lim_{k\to\infty} x^k(t)$ として解が得られることから示されるのであった．

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x(0) = 1$$

について $x^k(t)$ と $\lim_{k\to\infty} x^k(t)$ を求めよ．

解答

いくつか解答を掲載する．自力で考えてみてわからなかった場合には，参考にするように．

解答 1

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=V_0\cos\omega t$$

$T=\omega t$ と尺度変換することにより

$$\omega^2L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}T^2}+\omega R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}T}+\frac{1}{C}q=V_0\cos T$$

と変形できる．

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}T^2}+\frac{R}{\omega L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}T}+\frac{1}{\omega^2LC}q=\frac{V_0}{\omega^2L}\cos T$$

さらに $Q=\frac{\omega^2L}{V_0}q$ と尺度変換することにより

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}T^2}+\frac{\omega R}{V_0}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}+\frac{1}{V_0C}Q=\cos T$$

となる．これは

$$\tilde{R}=\frac{\omega R}{V_0},\quad \tilde{C}=V_0C$$

とおいた時に

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}T^2}+\tilde{R}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}+\frac{1}{\tilde{C}}P=\cos T$$

になる．また，これ以上尺度変換により定数を減らすことはできないので，本質的に 1 にできない定数は 2 つである．

解答 2 方程式を変形して

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\frac{dx}{dt}=1$$

として, 両辺を t で積分すると

$$\int_0^t\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\frac{dx}{dt}dt=\int_0^t 1dt$$
$$\int_2^x\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx=t$$

左辺は

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

と表せるはずである．両辺に $(x-1)^2(x^2+1)$ をかけると

$$\begin{aligned}x^2&=A(x^2+1)+B(x^2+1)(x-1)+(Cx+D)(x-1)^2\\&=(B+C)x^3+(A-B-2C+D)x^2+(B+C-2D)x+(A-B+D)\end{aligned}$$

だから,

$$B + C = 0, A - B - 2C + D = 1, B + C - 2D = 0, A - B + D = 0.$$

これを解くと

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = 0.$$

これから,

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

これを用いて

$$\int_2^x \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} dx = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2} + \frac{\log 5}{4}$$

よって,

$$-\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2} + \frac{\log 5}{4} = t$$

解答 3

$$e^{-bx}\frac{dx}{dt} = e^{at}$$

を t で積分して,

$$\begin{aligned}
\int e^{-bx}\frac{dx}{dt}dt &= \int e^{at}dt \\
\int e^{-bx}dx &= \int e^{at}dt \\
-\frac{1}{b}e^{-bx} &= \frac{1}{a}e^{at} + C \\
e^{-bx} &= -\frac{b}{a}e^{at} - bC \\
-bx &= \log(-\frac{b}{a}e^{at} - bC) \\
x &= -\frac{1}{b}\log(-\frac{b}{a}e^{at} - bC)
\end{aligned}$$

解答 4 変数分離形である.

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}}\frac{dx}{dt} = t$$

として両辺を t で積分する.

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}}\frac{dx}{dt}dt &= \int_0^t tdt \\
\int_0^x \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx &= \frac{1}{2}t^2
\end{aligned}$$

左辺は

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{dx}{e^x+e^{-x}} &= \int_1^s \frac{1}{s+s^{-1}}\frac{ds}{s} \qquad (s=e^x)\\ &= \int_1^s \frac{ds}{s^2+1} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad (s=\tan\theta)\\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} d\theta = \theta-\frac{\pi}{4} = \arctan s - \frac{\pi}{4} = \arctan e^x - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

よって，

$$x = \log\tan\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{\pi}{4}\right)$$

解答 5 $y=\frac{d^2x}{dt^2}$ とおくと，y に関する 1 階の微分方程式

$$\frac{dy}{dt}-\frac{1}{t}y(1-y)=0$$

となる．これは，変数分離型になっている．$y(t)\neq 0,1$ では

$$\begin{aligned}\frac{1}{y(1-y)}\frac{dy}{dt} &= \frac{1}{t}\\ \int \frac{1}{y(1-y)}\frac{dy}{dt}dt &= \int tdt\\ \int \frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}dy &= \log|t|+C_1\\ \log|y|-\log|1-y| &= \log|t|+C_1\\ \log\left|\frac{y}{1-y}\right| &= \log|t|+C_1\\ \frac{y}{1-y} &= \pm e^{C_1}t = C_2 t \qquad (C_2\neq 0)\\ y &= \frac{C_2t}{1+C_2t} = 1-\frac{1}{1+C_2t}\\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{C_2t}{1+C_2t} = 1-\frac{1}{1+C_2t}\\ \frac{dx}{dt} &= t+C_3-\frac{1}{C_2}\log|1+C_2t|\\ x &= \frac{1}{2}t^2+C_3t+C_4-\frac{1}{C_2^2}\left((1+C_2t)\log|1+C_2t|-\int 1dt\right)\\ x &= \frac{1}{2}t^2+C_3t+C_4-\frac{1}{C_2^2}\left((1+C_2t)\log|1+C_2t|-t\right)\\ x &= \frac{1}{2}t^2+\left(C_3+\frac{1}{C_2^2}\right)t+C_4-\frac{(1+C_2t)}{C_2^2}\log|1+C_2t|\\ x &= \frac{1}{2}t^2+\left(C_3+\frac{1}{C_2^2}\right)t+C_4-C_2^{-1}(C_2^{-1}+t)(\log|C_2^{-1}+t|+\log|C_2|)\end{aligned}$$

未定の定数を置き直して整理すると，

$$x=\frac{1}{2}t^2+c_1t+c_2-c_3(c_3+t)\log|c_3+t|$$

と表される．$c_3 = C_2^{-1}$ であったから，$c_3 = 0$ とはできないが，$c_3 = 0$ としてみると $y = 1$ に相当する解になっていることがわかる．$y = 0$ に相当する解は，$x = c_1 t + c_2$ でこれも合わせると一般解が得られたことになる．

解答 6 同次形だから $y = \frac{x}{t}$ とおく．すると，

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a + \cos y}{t}$$

となり, 変数分離形になる．よって,

$$\frac{1}{a + \cos y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

として t で積分すると,

$$\int_1^t \frac{1}{a + \cos y}\frac{dy}{dt}dt = \int_1^t tdt$$
$$\int_0^y \frac{1}{a + \cos y}dy = \log t$$

左辺の積分はまず $u = \tan\frac{y}{2}$ により変換して,

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{dy}{\cos y + a} &= \int_0^u \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2} + a}\frac{2}{1+u^2}du = \int_0^u \frac{2}{(a-1)u^2 + (a+1)}du \\
&= \int_0^u \frac{2}{(a-1)u^2 + (a+1)}du \qquad \left(u = \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}s\right) \\
&= \int_0^s \frac{2}{(a+1)(s^2+1)}\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}ds = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\int_0^s \frac{1}{s^2+1}ds \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\int_0^\theta \frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad (s = \tan\theta) \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\int_0^\theta d\theta = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\theta = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan s \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}u\right) = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\tan\frac{y}{2}\right)
\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\tan\frac{y}{2}\right) = \log t$$

計算すると,

$$y = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\tan\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{2}\log t\right)\right)$$

ゆえに,

$$x = 2t\arctan\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\tan\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{2}\log t\right)\right)$$

解答 7 連立方程式

$$\alpha - 2\beta + 3 = 0$$
$$2\alpha + \beta - 4 = 0$$

を解くと $\alpha = 1, \beta = 2$ が得られる．そこで，

$$t = s + 1, \quad x = y + 2$$

により，独立変数を t から s に，未知関数 (従属変数) を x から y に変換する．つまり，

$$x(s+1) = y(s) + 2.$$

すると，

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d(x-2)}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{t - 2x + 3}{2t + x - 4} = \frac{s - 2y}{2s + y},$$

つまり

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s - 2y}{2s + y}$$

になる．これは，

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1 - 2\frac{y}{s}}{2 + \frac{y}{s}}$$

と表せるから同次形である．$y = us$ により y を u に変換すると，

$$\frac{dy}{ds} = \frac{du}{ds}s + u = \frac{1 - 2\frac{y}{s}}{2 + \frac{y}{s}} = \frac{1 - 2u}{2 + u}$$

となり，

$$\frac{du}{ds} = \left(\frac{1 - 2u}{2 + u} - u\right)\frac{1}{s}$$

と表せる．これで変数分離形になった．解を求めよう．

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{ds} = \left(\frac{1 - 4u - u^2}{2 + u}\right)\frac{1}{s} \\
&\frac{2 + u}{1 - 4u - u^2}\frac{du}{ds} = \frac{1}{s} \\
&\int \frac{2 + u}{1 - 4u - u^2}\frac{du}{ds}ds = \int \frac{ds}{s} \\
&\int \frac{2 + u}{1 - 4u - u^2}du = \int \frac{ds}{s} \\
&-\frac{1}{2}\log|1 - 4u - u^2| = \log|s| + C \\
&\log|1 - 4u - u^2| + 2\log|s| = -2C \\
&\log s^2|1 - 4u - u^2| = -2C \\
&s^2|1 - 4u - u^2| = e^{-2C} \\
&s^2(1 - 4u - u^2) = \pm e^{-2C}
\end{aligned}$$

この右辺は定数だから C_1 とおくと，

$$s^2(1 - 4u - u^2) = C_1$$

である．$C_1 = 0$ でも解になることがわかるから，C_1 は任意の実数である．もとの変数 x, t に戻すと，

$$(t-1)^2 - 4(x-2)(t-1) - (x-2)^2 = C_1$$

となるので，これを x について解くことで一般解

$$x = -2t + 4 \pm \sqrt{5(t-1)^2 - C_1}$$

が得られる．

解答 8

$$f(x,t) = \frac{tx}{t^2 + x}$$

とおくと，

$$f(\lambda^2 x, \lambda t) = \frac{(\lambda t)(\lambda^2 x)}{(\lambda t)^2 + \lambda^2 x} = \frac{\lambda t x}{t^2 + x} = \lambda f(x,t)$$

が成り立つ．従って，$x = t^2 y$ とおくとよい．実際，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -2t^{-3}x + t^{-2}\frac{dx}{dt} = -2t^{-3}x + t^{-2}\frac{tx}{t^2+x} = -2t^{-3}(t^2 y) + t^{-2}\frac{t(t^2 y)}{t^2 + t^2 y} \\ &= -2t^{-1}y + t^{-1}\frac{y}{1+y} = -t^{-1}\left(\frac{y+2y^2}{1+y}\right)\end{aligned}$$

となり，変数分離形になった．

$$\begin{aligned}&\frac{1+y}{y+2y^2}\frac{dy}{dt} = -t^{-1} \\ &\int \frac{1+y}{y+2y^2}\frac{dy}{dt}dt = -\int t^{-1}dt \\ &\int \frac{1+y}{y+2y^2}dy = -\int t^{-1}dt \\ &\int \frac{1}{y} - \frac{1}{1+2y}dy = -\int t^{-1}dt \\ &\log|y| - \frac{1}{2}\log|1+2y| = -\log|t| + C \\ &\log\frac{t^2y^2}{|1+2y|} = 2C \\ &\frac{t^2y^2}{1+2y} = \pm e^{2C}\end{aligned}$$

ここで，右辺は定数だから定数 C_1 にすると，

$$\frac{t^2y^2}{1+2y} = C_1$$

と表すことができる．x に戻すと

$$\frac{x^2}{t^2+2x} = C_1$$

が得られる．x について解いて，一般解は

$$x = C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + C_1 t^2}$$

と表される．

解答 9 対応する全微分方程式は

$$(3xy+2y^2)dx+(2x^2+3xy)dy=0$$

と表される．積分因子をかけると

$$xy(3xy+2y^2)dx+xy(2x^2+3xy)dy$$

となる．

これが完全形であることを確かめておこう．

$$\begin{aligned}\{xy(3xy+2y^2)\}_y&=6x^2y+6xy^2\\ \{xy(2x^2+3xy)\}_x&=6x^2y+6xy^2\end{aligned}$$

となり確かに完全形である．

よって，保存量 $\Phi(x,y)$ が存在するはずである．

$$\Phi_x=xy(3xy+2y^2),\Phi_y=xy(2x^2+3xy)$$

だから

$$\Phi=x^3y^2+x^2y^3$$

とするとよい．従って，解は C を定数にすることで，

$$x^3y^2+x^2y^3=C$$

により決まる．

なお，この微分方程式は同次形であるから，同次形の解法 ($z=y/x$ で変換する) でも解くことができる．

解答 10 対応する全微分方程式は

$$(2x^3y-y^4)\mathrm{d}x-(x^4-2xy^3)\mathrm{d}y=0$$

と表される．積分因子 $\frac{1}{x^2y^2}$ をかけると

$$\left(2\frac{x}{y}-\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\left(2\frac{y}{x}-\frac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$$

となる．これが完全系であることを確かめる．

$$\begin{aligned}\left(2\frac{x}{y}-\frac{y^2}{x^2}\right)_y&=-2\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)\\ \left(2\frac{y}{x}-\frac{x^2}{y^2}\right)_x&=-2\left(\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}\right)\end{aligned}$$

となり確かに完全系である．よって，保存量 $\Phi(x,y)$ が存在するはずである．

$$\Phi_x = \left(2\frac{x}{y} - \frac{y^2}{x^2}\right), \quad \Phi_y = \left(2\frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}\right)$$

であるから，

$$\Phi(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$$

とするとよい．

解答 11 定数変化法で解けばよい．まず

$$\frac{dx}{dt} + x = 0$$

を解くと, 一般解は C を任意定数として

$$x = Ce^{-t}$$

と表される．この解 e^{-t} を使って，

$$x = ye^{-t}$$

問題の方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} y'e^{-t} - ye^{-t} + ye^{-t} &= e^t \\ y' &= e^{2t} \\ y &= \frac{1}{2}e^{2t} + C' \end{aligned}$$

故に, 求める一般解は

$$x = ye^{-t} = \frac{1}{2}e^t + C'e^{-t}$$

である．ここで C' は任意の定数.

解答 12 定数変化法を用いる．まず,

$$\frac{dx}{dt} + 2tx = 0$$

を解く.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} &= -2t \\ \int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt &= \int -2tdt \\ \int \frac{1}{x}dx &= \int -2tdt \\ \log|x| &= -t^2 + C \\ x &= \pm e^{-t^2+C} \\ x &= De^{-t^2} \end{aligned}$$

が一般解である.

$$x = e^{-t^2}y$$

を問題の方程式に代入すると

$$\begin{aligned} y'e^{-t^2} - 2tye^{-t^2} + 2tye^{-t^2} &= te^{-t^2} \\ y' &= t \\ y &= \frac{1}{2}t^2 + E \end{aligned}$$

故に, 求める一般解は

$$x = ye^{-t^2} = \frac{1}{2}t^2 e^{-t^2} + C'e^{-t^2}$$

である. ここで, C' は任意の定数である.

解答 13 与式 $\frac{du_j}{dt} = \epsilon_j u_j + \frac{1}{\beta_j}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} u_j u_k$ の両辺に β_j をかけて

$$\beta_j \frac{du_j}{dt} = \beta_j \epsilon_j u_j + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} u_j u_k$$

となる。これに与式より $\beta_j \epsilon_j = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} c_k$ を代入すると

$$\begin{aligned} \beta_j \frac{du_j}{dt} &= -u_j \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} u_j u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} u_j \alpha_{jk} (-c_k + u_k) \end{aligned}$$

このとき G を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{du_j}{dt} (1 - \frac{c_j}{u_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_j \alpha_{jk} (u_k - c_k)(1 - \frac{c_j}{u_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_j \alpha_{jk} (u_k - c_k)(u_j - c_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} u_j \alpha_{jk} (u_k - c_k)(u_j - c_j) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} u_k \alpha_{kj} (u_j - c_j)(u_k - c_k) \\ &= 0 \quad (\because \alpha_{jk} - \alpha_{kj} = 0) \end{aligned}$$

となり、G は時間不変である。

解答 14

$p(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ とおくと,

$$x = tp\,(p+1) + \frac{1}{p}$$

となる．両辺を，微分して整理すると

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= p(p+1) + t(2p+1)\frac{dp}{dt} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dt} \\ 0 &= p^2 + \left(t(2p+1) - \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dt} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{p^2}{t(2p+1) - \frac{1}{p^2}} \\ \frac{dt}{dp} &= -\frac{t(2p+1)}{p^2} + \frac{1}{p^4}\end{aligned}$$

となる．最後の式は $p(t)$ の逆関数 $t(p)$ を求める微分方程式になっている．

これを解こう．斉次にした方程式

$$\frac{du}{dp} = -\frac{u(2p+1)}{p^2}$$

を解く．

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}\frac{du}{dp} &= -\frac{2p+1}{p^2} \\ \int \frac{1}{u}\frac{du}{dp}dp &= -\int \frac{2p+1}{p^2}dp \\ \int \frac{1}{u}du &= -\int \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}dp \\ \log|u| &= -2\log|p| + \frac{1}{p} + C \\ u &= C'p^{-2}e^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

となる．

$$t = sp^{-2}e^{\frac{1}{p}}$$

を解きたい方程式

$$\frac{dt}{dp} = -\frac{t(2p+1)}{p^2} + \frac{1}{p^4}$$

に代入しよう．すると，

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dp}p^{-2}e^{\frac{1}{p}} + s\frac{d}{dp}(p^{-2}e^{\frac{1}{p}}) &= -\frac{sp^{-2}e^{\frac{1}{p}}(2p+1)}{p^2} + \frac{1}{p^4} \\ \frac{ds}{dp}p^{-2}e^{\frac{1}{p}} &= \frac{1}{p^4} \\ \frac{ds}{dp} &= \frac{1}{p^2}e^{-\frac{1}{p}} \\ s &= \int \frac{1}{p^2}e^{-\frac{1}{p}}dp \\ s &= e^{-\frac{1}{p}} + C''\end{aligned}$$

となる．よって，

$$t = sp^{-2}e^{\frac{1}{p}} = (e^{-\frac{1}{p}} + C'')p^{-2}e^{\frac{1}{p}}$$

となる．整理すると，

$$t = (1 + C''e^{\frac{1}{p}})p^{-2}$$

となる．これで，関数 $t(p)$ が得られ，具体的な関数としては表示できないが，この逆関数として $p(t)$ が決まる．その積分により $x(t)$ が定まる．ただその際の積分定数の取り方はもとの微分方程式を満たすのように定める必要がある．

より一般的な解法として説明を加える．非正規形の方程式のうち，

$$x = tf\left(\frac{dx}{dt}\right) + g\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

の形の微分方程式をダランベールの微分方程式といい，この方法で解くことができる．$p(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ とおき，$p(t)$ を求めてみることにしよう．$p(t)$ は

$$x = tf(p) + g(p)$$

を満たす．両辺を t で微分すると，

$$\frac{dx}{dt} = f(p) + tf'(p)\frac{dp}{dt} + g'(p)\frac{dp}{dt}$$

となり，$x' = p$ だから

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p - f'(p)}{tf'(p) + g'(p)} \tag{A.1}$$

となる．これで，p に関する正規形の方程式になった．この解 $p(t)$ が得られれば，それを積分することで $x(t)$ が得られる．

(A.1) はこのままだと解ける形には見えないが，$p(t)$ の逆関数 $t(p)$ を求める方程式と考え，

$$\frac{dt}{dp} = \frac{tf'(p) + g'(p)}{p - f'(p)} = \frac{f'(p)}{p - f'(p)}t + \frac{g'(p)}{p - f'(p)}$$

とすると，線形方程式だから解くことができる．

解答 15 $p(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ とおくと，

$$x = tp + t + p^2$$

と表される．両辺を t で微分すると，

$$\frac{dx}{dt} = p + 1 + t\frac{dp}{dt} + 2p\frac{dp}{dt}$$

となり，左辺は p なので

$$0 = 1 + t\frac{dp}{dt} + 2p\frac{dp}{dt}$$

となる．これを整理すると，

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{t + 2p}$$

となる．$p(t)$ に関する方程式だが，その逆関数 $t(p)$ に対する方程式に置き換えると，

$$\frac{dt}{dp} = -t - 2p$$

となる．これは，線形だから解ける．まず，斉次にした方程式

$$\frac{dt}{dp} + t = 0$$

を考えると，この解は

$$t = Ce^{-p}$$

である．

$$t = s(p)e^{-p}$$

を

$$\frac{dt}{dp} = -t - 2p$$

に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{ds}{dp}e^{-p} - se^{-p} = -se^{-p} - 2p \\
&\frac{ds}{dp} = -2pe^{p} \\
&s = -2\int pe^{p}dp = -2\left(pe^{p} - \int e^{p}dp\right) = -2\left(pe^{p} - e^{p} + C\right)
\end{aligned}$$

となり，

$$t(p) = s(p)e^{-p} = -2\left(p - 1 + Ce^{-p}\right)$$

が得られた．

$$t(p) = -2\left(p - 1 + Ce^{-p}\right)$$

の逆関数として $p(t)$ が定まり，その積分 $\int p(t)dt$ として $x(t)$ が得られる．

解答 16

$y = x^{-2}$ とおくとよい．これにより変換すると，

$$\frac{dy}{dt} = -2x^{-3}\frac{dx}{dt} = -2x^{-3}(-tx + tx^3) = 2tx^{-2} - 2t = 2ty - 2t$$

となり，線形方程式

$$\frac{dy}{dt} - 2ty = -2t$$

になった．これは，定数変化法で解けばよい．まず，斉次方程式

$$\frac{dw}{dt} - 2tw = 0$$

を解こう．

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= 2tw \\
\frac{1}{w}\frac{dw}{dt} &= 2t \\
\int \frac{1}{w}\frac{dw}{dt}dt &= \int 2tdt \\
\log|w| &= t^2 + C \\
w &= \pm e^{C}e^{t^2}
\end{aligned}$$

となる．

$$y = e^{t^2}z$$

を解きたい線形方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} 2te^{t^2}z + e^{t^2}\frac{dz}{dt} - 2te^{t^2}z &= -2t \\ \frac{dz}{dt} &= -2te^{-t^2} \\ z &= e^{-t^2} + C_1 \end{aligned}$$

となる．従って，y は

$$y = e^{t^2}z = 1 + C_1 e^{t^2}$$

であり，さらに x に戻すと，

$$\begin{aligned} x^{-2} &= 1 + C_1 e^{t^2} \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{1 + C_1 e^{t^2}}} \end{aligned}$$

となる．$x \equiv 0$ という解もあるので[*2]，一般解は

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + C_1 e^{t^2}}}, 0$$

と表される．

解答 17 完全形であるための必要十分条件は

$$\{p(x) + q(y)\}_y = \{r(x) + s(y)\}_x$$

である．この条件は

$$q'(y) = r'(x)$$

と表せる．左辺と右辺はそれぞれ y のみ，x のみの関数となっているのでどちらも定数でないといけない．よって，ある定数 k により

$$q'(y) = r'(x) = k$$

となる．従って，ある定数 k, a, b により

$$q(y) = ky + a, \quad r(x) = kx + b$$

と表せることが，求める条件である．

このとき，全微分方程式は

$$(p(x) + ky + a)dx + (kx + b + s(y))dy = 0$$

と表せる．

$$d\Phi = (p(x) + ky + a)dx + (kx + b + s(y))dy$$

となる Φ は

$$\Phi = \int p(x)dx + \int s(y)dy + kxy + ax + by$$

[*2] これは，$y = x^{-2}$ とした際に除外されたものである

である．従って，一般解は

$$\int p(x)dx + \int s(y)dy + kxy + ax + by = C$$

と表される．

解答 18

A の固有値を求める．

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+8 & 6 \\ -15 & \lambda-10 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

だから, $\lambda = 1 \pm 3i$. $1 \pm 3i$ に対応する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1\pm 3i+8 & 6 \\ -15 & 1\pm 3i-10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3\pm i & 2 \\ -5 & -3\pm i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから例えば $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3\mp i \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3-i & -3+i \end{pmatrix}$$

とすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1+3i & 0 \\ 0 & 1-3i \end{pmatrix}$$

となる．微分方程式の解は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \exp(tA)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= P\left(\exp t\begin{pmatrix} 1+3i & 0 \\ 0 & 1-3i \end{pmatrix}\right)P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix} e^{(1+3i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-3i)t} \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3-i & -3+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(1+3i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-3i)t} \end{pmatrix}\frac{1}{4i}\begin{pmatrix} -3+i & -2 \\ 3+i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} 2(-3+i)e^{(1+3i)t} + 2(3+i)e^{(1-3i)t} \\ (-3-i)(-3+i)e^{(1+3i)t} + (-3+i)(3+i)e^{(1-3i)t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^t}{4i}\begin{pmatrix} -12i\sin 3t + 4i\cos 3t \\ 20i\sin 3t \end{pmatrix} \\ &= e^t\begin{pmatrix} -3\sin 3t + \cos 3t \\ 5\sin 3t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

解答 19 $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $A=2I+N$ である．$N^2=O$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \exp(tA)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \exp(t(2I+N))\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k(2I+N)^k\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k(2^kI+2^{k-1}kN)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k2^kI+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\frac{1}{(k-1)!}2^{k-1}N\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= (e^{2t}I+te^{2t}N)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= e^{2t}\begin{pmatrix} 1+3t \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

解答 20 A の固有値を求める．

$$\det(\lambda E-A)=(\lambda+3)(\lambda-1)+8=\lambda^2+2\lambda+5=0$$

であるから，固有値は

$$\lambda_{\pm}=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2i$$

である．

$$\lambda_{\pm}E-A=\begin{pmatrix} 2\pm 2i & 2 \\ -4 & -2\pm 2i \end{pmatrix}$$

対応する固有ベクトルは，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1\mp i \end{pmatrix}$$

である．よって，一般解は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= C_1e^{(-1+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}+C_2e^{(-1-2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} \\
&= e^{-t}\left(C_1(\cos 2t+i\sin 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}+C_2(\cos 2t-i\sin 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}\right) \\
&= e^{-t}\begin{pmatrix} (C_1+C_2)\cos 2t+i(C_1-C_2)\sin 2t \\ (-(C_1+C_2)-i(C_1-C_2))\cos 2t+((C_1+C_2)-i(C_1-C_2))\sin 2t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と表される．

$$C_1'=C_1+C_2, C_2'=i(C_1-C_2)$$

とすると，解は

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix} C_1'\cos 2t+C_2'\sin 2t \\ (-C_1'-C_2')\cos 2t+(C_1'-C_2')\sin 2t \end{pmatrix}$$

と表せる.

解答 21

$$
\begin{aligned}
&\det\left(\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&-1&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}\right)\\
=&\det\begin{pmatrix}\lambda-1&0&2\\-2&\lambda+1&2\\2&-2&\lambda\end{pmatrix}\\
=&\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)
\end{aligned}
$$

よって, 固有値は $0,1,-1$.

固有値 0 に対する固有ベクトルを $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とおくと,

$$
\left(0\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&-1&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}
$$

を満たす. これを満たすのは例えば, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

固有値 1 に対する固有ベクトルを $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とおくと,

$$
\left(1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&-1&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}
$$

を満たす. これを満たすのは例えば, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

固有値 -1 に対する固有ベクトルを $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とおくと,

$$
\left(-1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&-1&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}
$$

を満たす. これを満たすのは例えば, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

これらの固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ により対角化できる．つまり，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

解は $\boldsymbol{x}(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であった．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= PP^{-1}\exp(tA)PP^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = P\exp(tP^{-1}AP)P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3e^t + 2e^{-t} - 4 & -2e^t - 2e^{-t} + 4 & -2e^t + 2 \\ 3e^t + e^{-t} - 4 & -2e^t - e^{-t} + 4 & -2e^t + 2 \\ 2e^{-t} - 2 & -2e^{-t} + 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t + 4e^{-t} - 6 \\ 3e^t + 2e^{-t} - 6 \\ 4e^{-t} - 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

解答 22 特性方程式は

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 5\lambda + 6 &= 0 \\ (\lambda - 2)(\lambda - 3) &= 0 \end{aligned}$$

となり，この解は $\lambda = 2, 3$ だから，微分方程式の一般解は

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

である．

解答 23

$$\begin{aligned} (D^2 + 2D - 3)x &= 0 \\ (D + 3)(D - 1)x &= 0 \end{aligned}$$

であるから，e^t, e^{-3t} が基本解になる．よって，一般解は

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$$

である．

解答 24

$$(D^2 + kD + 1)x = 0$$

と表せる．特性方程式の根は

$$\lambda = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$$

である．従って一般解は，

(1)$k^2-4>0$ のとき

$$x(t) = C_1 \exp \frac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2} t + C_2 \exp \frac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2} t$$

(2)$k^2-4=0$ のとき

$$x(t) = \exp\left(-\frac{k}{2}t\right)(C_1 + C_2 t)$$

(3)$k^2-4<0$ のとき

$$x(t) = C_1 \exp\left(-\frac{k}{2}t\right)\cos\sqrt{4-k^2}t + C_2 \exp\left(-\frac{k}{2}t\right)\sin\sqrt{4-k^2}t$$

となる．

これより，$k \geq 2$(空気抵抗が大きい) のとき，最終的には単調に 0 に収束する．$0<k<2$(空気抵抗が小さい) のとき，振動しながら 0 に収束する．

解答 25 特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

となり，この解は

$$\lambda = 2 \pm i$$

だから，微分方程式の一般解は

$$x(t) = C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t$$

である．

解答 26 特性方程式は

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

となり，この解は

$$\lambda = 1,\ 2(\text{重解})$$

であるので，微分方程式の一般解は

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t} \quad (C_1, C_2, C_3 \text{は任意の定数})$$

である．

解答 27 特性方程式は

$$\lambda^n - 1 = 0$$

だからこの解は

$$\lambda = \cos\frac{2\pi k}{n} \pm i\sin\frac{2\pi k}{n} \qquad (k = 0, \ldots, [n/2])$$

である．よって，微分方程式の一般解は

$$x(t) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \left\{ C_{1k} e^{\left(\cos\frac{2\pi k}{n}\right)t} \cos\left(\left(\sin\frac{2\pi k}{n}\right)t\right) + C_{2k} e^{\left(\cos\frac{2\pi k}{n}\right)t} \sin\left(\left(\sin\frac{2\pi k}{n}\right)t\right) \right\}$$

である．見かけ上，基本解が多すぎる (n 個より多くある) が，$k = 0$ のときと, n が偶数で $k = n/2$ の

$$e^{\left(\cos\frac{2\pi k}{n}\right)t} \sin\left(\left(\sin\frac{2\pi k}{n}\right)t\right)$$

は 0 だから，これを考慮するとちょうど n 個の基本解の一次結合になっている．

解答 28 すぐに $x(t) = 2$ が解であることがわかる．斉次方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

の一般解は

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

だから求める一般解は

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + 2$$

である．

解答 29 微分方程式を $x = t$ が解であることが分かる．斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

の一般解は

$$y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$$

だから求める一般解は

$$x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + t$$

である．

解答 30

$$\frac{dy}{dt} - y = 0$$

の解は $y = Ce^t$ であるから，$x = ze^t$ を代入すると，

$$\frac{dz}{dt}e^t + ze^t - ze^t = e^{2t}$$

となる．

$$\frac{dz}{dt} = e^t$$
$$z = e^t + C$$
$$x = e^{2t} + Ce^t$$

が解である．

解答 31 眺めていてもなかなか特殊解は見つからなければ，たたみこみを用いて特殊解を求める．たたみこみを用いると，特殊解は

$$x = e^t * e^{2t} * e^t = e^t * \int_0^t e^{2(t-s)} e^s ds = e^t * \int_0^t e^{2t-s} ds = e^t * [-e^{2t-s}]_{s=0}^t = e^t * (e^{2t} - e^t)$$
$$= \int_0^t e^{t-s}(e^{2s} - e^s) ds = \int_0^t e^{t+s} - e^t ds = [e^{t+s} - se^t]_{s=0}^t = e^{2t} - e^t - te^t$$

と求まる．一般解は

$$x = -te^t + C_2 e^t + C_1 e^{2t}$$

となる．

解答 32 $x = t^\alpha$ を代入すると，

$$\alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2} = -at^{\alpha-2}$$

よって，$\alpha(\alpha - 1) = -a$ のとき $x = t^\alpha$ は解になる．この 2 次方程式を解くと，

$$\alpha_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$$

である．これらが正の実数で異なることが仮定よりわかる．

これで 2 つの独立な解が得られたから，一般解は

$$x(t) = C_1 t^{\alpha_+} + C_2 t^{\alpha_-}$$

と表せる．$\alpha_\pm > 0$ より

$$\lim_{t \to +0} t^{\alpha_\pm} = 0$$

だから

$$\lim_{t \to +0} x(t) = 0$$

が成り立つ．
(平成 27 年度　京都大学理学研究科数学数理解析専攻　修士課程入試問題)

解答 33

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

の解は $x = ce^{at}$ だから，$x = ye^{at}$ を解きたい微分方程式に代入すると，

$$\frac{dy}{dt} e^{at} + aye^{at} = aye^{at} + p(t)$$

となり，

$$\frac{dy}{dt} = p(t)e^{-at}$$

となる．よって，

$$y(t) = \int p(t)e^{-at}dt$$

である．

$x(0) = x_0$ とすると $y(0) = x_0$ で

$$y(t) = \int_0^t p(s)e^{-as}ds + x_0$$

と表せる．

$$x(t+T) = x(t)$$

に当てはめると

$$e^{a(t+T)}\left(\int_0^{t+T} p(s)e^{-as}ds + x_0\right) = e^{at}\left(\int_0^t p(s)e^{-as}ds + x_0\right)$$

となり，これを整理すると

$$e^{aT}\left(\int_0^{t+T} p(s)e^{-as}ds + x_0\right) = \left(\int_0^t p(s)e^{-as}ds + x_0\right)$$

$$\int_0^{t+T} p(s)e^{-a(s-T)}ds + x_0e^{aT} = \int_0^t p(s)e^{-as}ds + x_0$$

$$\int_{-T}^t p(s+T)e^{-as}ds + x_0e^{aT} = \int_0^t p(s)e^{-as}ds + x_0$$

$$x_0(e^{aT}-1) = -\int_{-T}^0 p(s)e^{-as}ds = -\int_0^T p(s-T)e^{-a(s-T)}ds$$

$$x_0 = -\frac{1}{e^{aT}-1}\int_0^T p(s)e^{-a(s-T)}ds$$

となり x_0 は一意に決まり，この x_0 ならば x が T 周期的になる．
(平成 26 年度　京都大学理学研究科数学数理解析専攻　修士課程入試問題)

解答 34 $x = ye^{-pt}$ とすると，

$$(-p)ye^{-pt} + y'e^{-pt} = -pye^{-pt} + f(t)$$
$$y' = e^{pt}f(t)$$
$$y = \int^t e^{ps}f(s)ds$$

となり，一般解は

$$x(t) = e^{-pt}\left(\int_0^t e^{ps}f(s)ds + C\right) = \int_0^t e^{-p(t-s)}f(s)ds + Ce^{-pt}$$

である．$0 < T < t$ のとき

$$\begin{aligned}|x(t)| &\leq \int_0^T \left|e^{-p(t-s)}f(s)\right| ds + \int_T^t \left|e^{-p(t-s)}f(s)\right| ds + |C|e^{-pt} \\ &\leq e^{-p(t-T)}\int_0^T |f(s)|\, ds + \int_T^t |f(s)|\, ds + |C|e^{-pt} \\ &\leq e^{-p(t-T)}\int_0^\infty |f(s)|\, ds + \int_T^\infty |f(s)|\, ds + |C|e^{-pt}\end{aligned}$$

が成り立つ．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．十分大きな T をとると，

$$\int_T^\infty |f(s)|\, ds < \frac{\varepsilon}{3}$$

をみたすので，そのような T をとり固定する．そのもとで，さらに t を十分大きく取ると

$$e^{-p(t-T)}\int_0^\infty |f(s)|\, ds < \frac{\varepsilon}{3}$$

を満たし，$|C|e^{-pt} < \frac{\varepsilon}{3}$ を満たすようにもできる．ゆえに，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，十分大きな t に対して $|x(t)| < \varepsilon$ が成り立つ．すなわち，

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

が成り立つ．
(平成 29 年度　京都大学理学研究科数学数理解析専攻　修士課程入試問題)

解答 37

1. Lipschitz 条件を満たさない．
   (証明) 背理法を用いて証明する．Lipschitz 条件を満たすと仮定して，Lipschitz 定数を L とする．つまり，
   $$|u^2 - v^2| \leq L|u - v| \quad \text{for } {}^\forall u, v \in \mathbb{R}$$
   が成り立つと仮定する．ここで，$u = L/2 + 1$, $v = L/2$ とすると，
   $$\begin{aligned}|u^2 - v^2| &= L + 1 \\ L|u - v| &= L\end{aligned}$$
   より，
   $$|u^2 - v^2| \not\leq L|u - v|$$
   となってしまい，仮定に矛盾する．したがって，Lipschitz 条件を満たさない．
   (補足) $y = x^2$ という写像について，x が限りになく大きくなると，傾きも限りなく大きくなっていくため Lipschitz 条件を満たさないと予想できる．実際に，Lipschitz 定数を L を定めたとしても，$dy/dx = 2x = L$ なる x を求めることで，$|x| > L/2$ の範囲において傾きが L よりも大きくなってしまい，Lipschitz 条件を満たさないことがわかる．
2. Lipschitz 条件を満たす．
   (証明) Lipschitz 定数を 1 とした，Lipschitz 条件
   $$\left|\sqrt{u_1^2 + u_2^2} - \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right| \leq \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} \quad \text{for } {}^\forall(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

が成り立つことを証明する．そこで，上式の (右辺)^2 − (左辺)^2 を計算する．

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2 &= \left(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2-2u_1v_1-2u_2v_2\right)-\left(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2-2\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)\\
&= 2\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}-u_1v_1-u_2v_2\right)\geq 0
\end{aligned}
$$

最後の不等号は Cauchy-Schwarz の不等式より成り立つ．

3. Lipschitz 条件を満たさない．

(証明) 背理法を用いて証明する．Lipschitz 条件を満たすと仮定して，Lipschitz 定数を L とする．つまり，

$$
\left|\sqrt{u_1^2-u_2^2}-\sqrt{v_1^2-v_2^2}\right|\leq L\sqrt{(u_1-v_2)^2+(u_2-v_2)^2}\quad \text{for } {}^\forall(u_1,u_2),(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2
$$

が成り立つと仮定する．ここで，$u_1=u_2=v_1=1$, $v_2=\frac{L}{\sqrt{1+L^2}}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt{u_1^2-u_2^2}-\sqrt{v_1^2-v_2^2}\right| &= \frac{1}{\sqrt{1+L^2}}\\
L\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2} &= L-\frac{L^2}{\sqrt{1+L^2}}
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
L\sqrt{(u_1-v_2)^2+(u_2-v_2)^2}-\left|\sqrt{u_1^2-u_2^2}-\sqrt{v_1^2-v_2^2}\right| &= L-\frac{L^2}{\sqrt{1+L^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+L^2}}\\
&= L-\sqrt{1+L^2}<0
\end{aligned}
$$

となってしまい，仮定に矛盾する．したがって，Lipschitz 条件を満たさない．

(補足) $y=\sqrt{x_1^2-x_2^2}$ という写像について，x_1 を固定して軌道を調べると上半円を描く関数になっていることがわかる．(実際にプロットして確認するとよい．) 上半円の端に注目すると傾きが限りなく大きく（あるいは小さく）なるので，Lipschitz 条件を満たさないと予想できる．実際に，Lipschitz 定数を L を定めたとしても，$\partial y/\partial x_2=L$ なる x_2^* を求めることで，$|x_2|>|x_2^*|$ の範囲において傾きの絶対値が L よりも大きくなってしまい，Lipschitz 条件を満たさないことがわかる．

4. Lipschitz 条件を満たさない．

(証明) 背理法を用いて証明する．$y=f(x)$ とおく．Lipschitz 条件を満たすと仮定して，Lipschitz 定数を L とする．つまり，

$$
|f(u)-f(v)|\leq L|u-v|\quad \text{for } {}^\forall u,v\in\mathbb{R}
$$

が成り立つと仮定する．ここで，$u=e^{-1-L}$, $v=0$ とすると，

$$
\begin{aligned}
|f(u)-f(v)| &= (1+L)e^{-1-L}\\
L|u-v| &= Le^{-1-L}
\end{aligned}
$$

より，

$$
L|u-v|-|f(u)-f(v)|=-e^{-1-L}<0
$$

となってしまい，仮定に矛盾する．したがって，Lipschitz 条件を満たさない．

(補足) $y=f(x)$ という写像について，$x>0$ において $f'(x)=\log x+1$ となることから，$x=0$ 付近で傾きの絶対値が限りなく大きくなってしまうことがわかる．よって，Lipschitz 条件を満たさないと予想できる．

5. Lipschitz 条件を満たす．

(証明) 任意の $x\in\mathbb{C}$ $(|x|<1)$ は Euler の公式を用いると

$$x=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(i=\sqrt{-1},\ 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta<2\pi)$$

のように r と θ を用いて表すことができる．$^\forall u,v\in\mathbb{C}$ に対して，$u=re^{i\theta},\ v=se^{i\phi}$ とおく．ただし，$0\leq r,s\leq 1$，$0\leq\theta,\phi<2\pi$ このとき，

$$\frac{\left|r^2e^{2i\theta}-s^2e^{2i\phi}\right|}{\left|re^{i\theta}-se^{i\phi}\right|}=\left|re^{i\theta}+se^{i\phi}\right|\leq\left|re^{i\theta}\right|+\left|se^{i\phi}\right|=|r|+|s|\leq 2$$

が成り立つ．つまり，Lipschitz 定数を 2 とした Lipschitz 条件が満たされる．

解答 38

$$x^1=1+\int_0^t 1ds=1+t$$

である．

$$x^2=1+\int_0^t(1+s)ds=1+t+\frac{1}{2}t^2$$

である．

$$x^3=1+\int_0^t 1+s+\frac{1}{2}s^2ds=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3!}t^3$$

となる．このようにして，一般に，

$$x^k=1+t+\frac{1}{2}t+\cdots+\frac{1}{k!}t^k=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}t^l$$

となる (本当は帰納法で確かめた方がよい)．$k\to\infty$ の極限は

$$\lim_{k\to\infty}x^k(t)=\lim_{k\to\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}t^l=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}t^l$$

となる．なお，これは e^t のテイラー展開と一致する．

解答 35 $a=-1,0,1,2$ ならば $x(t)=a$ が解になる．

$x(t)$ は $(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(2,\infty)$ では $(x+1)x(x-1)(x-2)>0$ だから単調増加，$x(t)$ は $(-1,0)\cup(1,2)$ では $(x+1)x(x-1)(x-2)<0$ だから単調減少である．解の一意性より $-1,0,1,2$ を通り過ぎることはない．$x(t)$ が $t\to\infty$ のとき収束すれば，その極限値では $(x+1)x(x-1)(x-2)=0$ だから $-1,0,1,2$ のどれかである．以上のことから，$a<0$ ならば $\lim_{t\to\infty}x(t)=-1$, $a=0$ ならば $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$, $0<a<2$ ならば $\lim_{t\to\infty}x(t)=1$, $a=2$ ならば $\lim_{t\to\infty}x(t)=2$ で，$a>2$ ならば $x(t)$ は単調増加で微分方程式の右辺の次数は 4 次だから有限の t で $x(t)$ は発散する．

(平成 19 年度　京都大学理学研究科数学数理解析専攻　修士課程入試問題)