

ELCAS:ビリヤードの数学

柴山允瑠 (京都大学情報学研究科)*

2018年1月20日

1 ビリヤード

ビリヤード台にビリヤードボールが1つあるとし、その軌道を考えよう。ボールが外枠に衝突した時は弾性衝突をとする。すなわち、入射角と反射角は等しくなる向きに、同じ速さで跳ね返るとする(図1)。空気

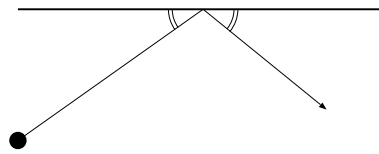


図1

やテーブルからの抵抗はないとする。そのため、動き出したボールは永久に運動し続ける。このような数学的にビリヤードの軌道を調べる問題は、工学、音響学、古典力学*1、統計力学などの様々なモデルで現れる。その軌道がどのような軌跡を描くかということを調べてみよう。実際のビリヤードのような長方形の場合の軌道は図2のようになる。

次からの節では色々なビリヤード台の場合について軌道の振る舞いを調べてみよう。なお、角にポケット(穴)はないとし、角に達する軌道は考えないことにする。また、以下角度は度数法(1周を 360°)で測ったものとする。

2 三角形

三角形のビリヤードを考える。全ての角が有理数かそうでないかで振る舞いが異なる。

まず次のような問題を考えてみよう。

問題 1. $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形 ABC のビリヤードを考える。ただし、 $K = \frac{180}{\angle C}$ は偶数であるとする。辺 AB 上の1点からその辺に垂直に動き出したビリヤードは、次に辺 AB に戻るまでに他の辺と衝突する回数を N とする。 N を K を用いて表せ。

* shibayama@amp.i.kyoto-u.ac.jp

*1 ビリヤードはポテンシャルがビリヤード台の内部では0、外側では無限大の値をとるような力学とみなせる。また、次の節の例1で見えるように、ある種の2質点系の弾性衝突運動はビリヤードと同じ問題になる。

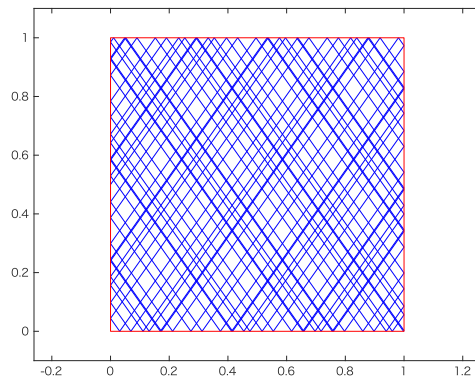


図2 長方形ビリヤード

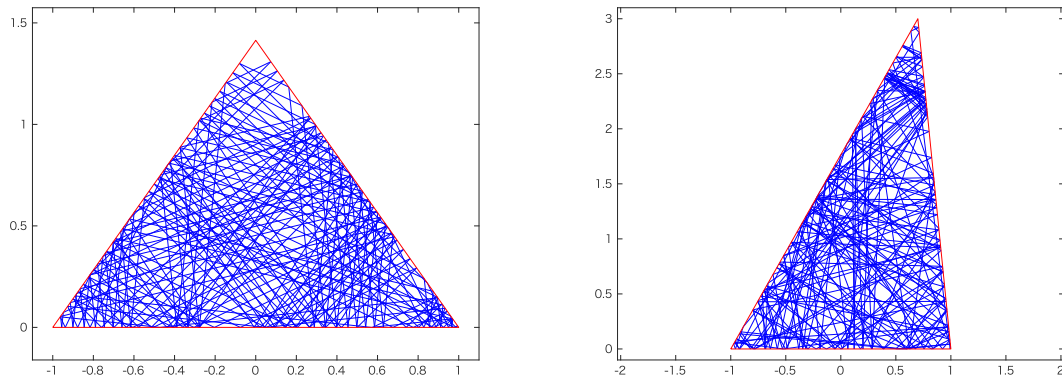


図3 三角形のビリヤード.

問題 2. 前問と同じ状況で, AC が AB に対して大きいと $\frac{N \times AB}{AC}$ は円周率に近い. なぜか.

解答. 直角三角形 ABC を辺 BC について裏返した直角三角形 $A'BC$ を描く. ビリヤード軌道はまず BC と衝突するが衝突後の軌道も $A'BC$ に描くと直線になる. それは次に $A'C$ に衝突するが, そこでも直角三角形 $A'BC$ を辺 $A'C$ について裏返した直角三角形 $A'B'C$ をとる. これを繰り返す. すると, 円に接する K 個の三角形ができる. その軌道を考えると, 底辺に対応する辺に達するまで, $K - 1$ 回他の辺を通過することがわかる. よって, $N = K - 1$ (問題 1 の答え).

以上の多角形に接する半円を考えると, その長さは πBC である. その半円は K 個の弧に分けられている. その 1 つの弧の長さを l とすると

$$\pi BC = Kl$$

が成り立つ. つまり,

$$\pi = \frac{Kl}{BC}$$

が成り立つ. さて, AB に対し AC が非常に大きい直角三角形だと, l は AB に近い. また, AC と BC もほ

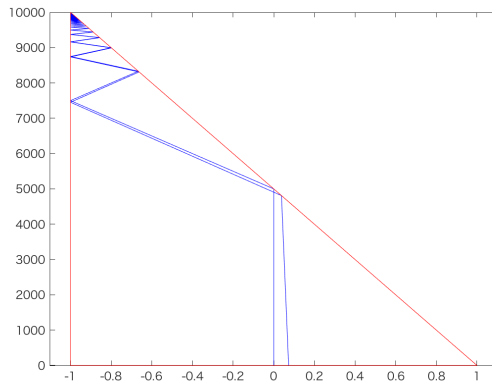


図4 尖った直角三角形のビリヤード: 入射角と反射角が違うように見えるのは縦横のスケールが違うからである.

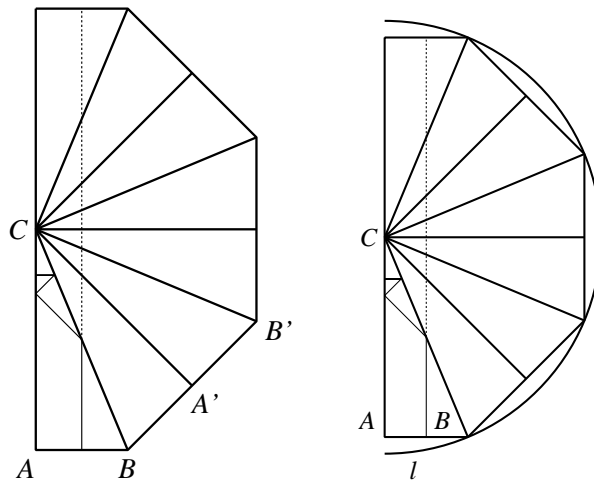


図5

ぼ同じとみて良いであろう。また、衝突回数も多くなるので、 $K = N - 1$ を N に置き換えても上式の評価に大きな差は出ない。よって、

$$\pi = \frac{Kl}{BC} \approx \frac{N \times AB}{AC}$$

という近似式が得られる。このビリヤードによる π の近似法は [1] による。

なお、 $\frac{180}{\angle C}$ が整数でなくても衝突回数が ± 1 しかかわらないので、 $\frac{180}{\angle C}$ は整数でなくても π に近い。

応用として、直線上の2質点の運動の衝突回数を調べよう。

例 1. x 軸の正の部分に質量 m_1, m_2 の2質点が運動するとする。その位置を x_1, x_2 とする。 $x_1 = 0$ と $x_1 = x_2$ となった衝突は弾性衝突とする (図6)。 $0 \leq x_1 \leq x_2$ としてよい。 x_1, x_2 の速度は右向きに動いているときは正、左向きの際は負とする。 x_1 が0となるとき、その速度 u_1 から $v_1 = -u_1$ に変わる。次に x_1 と

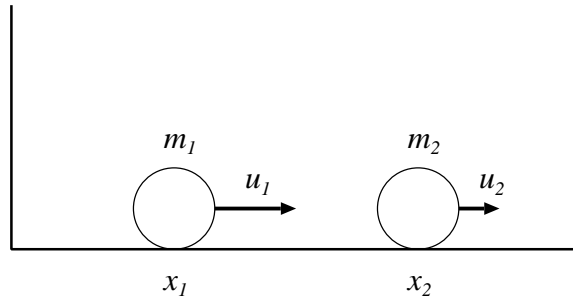


図 6

x_2 が衝突する場合を考える。衝突前のそれぞれの速度を u_1, u_2 、衝突後の速度を v_1, v_2 とすると

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

が成り立つ。最初の式は運動量保存の法則で、第二式は弾性衝突から導かれるエネルギー保存の法則である。

$\bar{x}_i = \sqrt{m_i} x_i$ とすると、 \bar{x}_1, \bar{x}_2 が満たす式は $0 \leq \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{m_1}} \leq \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{m_2}}$ である。速度も同じように変換する。 $0 \leq \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{m_1}} \leq \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{m_2}}$ における (\bar{x}_1, \bar{x}_2) の軌道を考える。0 衝突は $\bar{x}_1 = 0$ に達した時に \bar{v}_1 が $-\bar{v}_1$ 变为ることになるから、 (\bar{x}_1, \bar{x}_2) の軌道としては入射角と反射角が等しいことになる。

$$\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{m_1}} = \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{m_2}} \text{ となったとき}$$

$$\sqrt{m_1} \bar{u}_1 + \sqrt{m_2} \bar{u}_2 = \sqrt{m_1} \bar{v}_1 + \sqrt{m_2} \bar{v}_2, \quad \bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 = \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2$$

となる。壁に弾性衝突し、衝突前後で $(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$ との内積を保つことがわかる*2。

$\tan \alpha = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$ とする。展開して考えると、衝突回数は

$$\frac{180}{\alpha} + 1$$

以下である。

一般に、 n 粒子の直線運動は n 次元空間のビリヤードとして考えることができる。

3 円

円のビリヤードを考える。

問題 3. 円のビリヤード軌道は必ずいつかもとの位置に戻ってくるか？

解答. 衝突から次の衝突までは中心から見た角度は一定である (これを θ とする)。衝突する位置を中心から見た角度を調べれば良い。

最初角度 0 のところから始まるとする。 n 回目に衝突する位置を表す角度は $n\theta$ であるから、 θ が度数法で無理数なら戻ってこない。実際、もし n 回目に戻ってくるとすると、ある自然数 m で $n\theta = 360m$ となり、 $\theta = \frac{360m}{n}$ となり有理数となってしまう。

*2 原点から $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ を向いた直線のなす角を θ とすると $a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cos \theta$ が成り立つ。

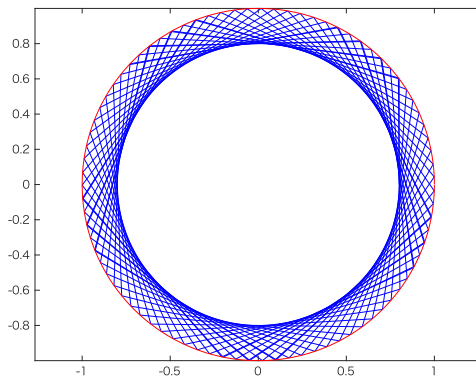


図 7

定理 1. θ が無理数のとき最初の位置のいくらでも近くに帰ってくる.

ここで、連分数展開を紹介する. 実数 a に対して, $[a]$ を a 以下の最大の整数とする. a を無理数とする. $k_0 = [a]$ とおく. $0 < a - k_0 < 1$ だから $a_1 = \frac{1}{a - k_0}$ とおくと $a_1 > 1$ である. 戻すと, $a = k_0 + \frac{1}{a_1}$ である. そこで, $k_1 = [a_1]$ とおく. 同様に, $a_2 = \frac{1}{a_1 - k_1}$, $k_2 = [a_2]$ となる. $a_1 = k_1 + \frac{1}{a_2}$ だから

$$a = k_0 + \frac{1}{a_1} = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{a_2}}$$

となる. これを繰り返すことで,

$$a = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \dots}}}$$

という式が成り立つ. これを連分数展開という.

問題 4. $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ の連分数展開を求めよ.

解答.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

n のところで連分数展開を止めて得られる分数を $\frac{p_n}{q_n}$ とする. p_n, q_n は自然数で互いに素である. 例えば,

$$\frac{p_1}{q_1} = k_0, \frac{p_2}{q_2} = k_0 + \frac{1}{k_1}, \frac{p_3}{q_3} = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2}}, \dots$$

である. $\frac{p_n}{q_n}$ を a の第 n 次近似分数という.

以下が知られている.

1. $1 = q_1 < q_2 < q_3 < \dots < q_n < q_{n+1} < \dots$

$$2. \left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left(\frac{1}{q_n} \right)^2$$

$q_n \geq n$ だから第 n 次近似分数は a の分数による近似を与えている。この証明については [3] などを参照されたい。

定理 1 の証明. $\frac{p_n}{q_n}$ を $\frac{\theta}{360}$ の第 n 次近似分数とする. $\beta_n = q_n\theta - 360p_n$ とする. β_n は q_n 回目の衝突の位置を表す角度である. $|\beta_n| < \frac{360}{q_n} \leq \frac{360}{n}$ だから, ビリヤード軌道はいくらでも元のいちに近く.

例えば, $n = 3600$ とすると $|\beta_{3600}| < 0.1$ である. $n = 36000$ とすると $|\beta_{36000}| < 0.01$ である. 同様に, いくらでも β_n は 0 に近くなる. \square

定理 2. θ が無理数のとき円のどの弧をとってもビリヤードはその弧に衝突する.

証明. 勝手に弧を取ってくる. その端点を表す角を $l, m (l < m)$ とする. $n > \frac{360}{m-l}$ となる n をとる. $|\beta_n| < m - l$ である. $k = 1, 2, \dots$ に対して kq_n 回目の衝突点を見ると角 β_n 毎に衝突するから必ずその弧も通る. \square

問題 5. 2^n は $n = 1, 2, 3, \dots$ とすると, $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$ となり, この最高桁目の数 $2, 4, 8, 3, 6, 1, \dots$ を調べよう. この数を調べるとなかなか 7 が現れないが, 7 はいずれ出てくるであろうか.

対数を使うので簡単に説明する. まず, 10^b は任意の実数 b に対しても定義できる. $a = 10^b$ のとき, $b = \log_{10} a$ と表す.

1. $\log_{10} a$ は a について単調増加. つまり, $a > c > 0$ なら $\log_{10} a > \log_{10} c$ が成り立つ.
2. $\log_{10}(ac) = \log_{10} a + \log_{10} c$
3. $\log_{10} a^n = n \log_{10} a$
4. $\log_{10} 1 = 0$
5. $\log_{10} 10 = 1$

問題 6. $\log_{10} 2$ は無理数であることを示せ.

解答. $\log_{10} 2$ が有理数 $\frac{p}{q}$ であるとする. $2 = 10^{\frac{p}{q}}$ だから $2^q = 10^p$ で左辺は 5 で割り切れないが右辺は割り切れるので矛盾.

解答 (問題 5 の解答). N の最高桁の数が 7 となる条件は $\log_{10} N$ の小数部分が $\log_{10} 7$ 以上 $\log_{10} 8$ 未満となることである. $\log_{10} 2^n = n \log_{10} 2$. 角度 0 から始まり $\theta = 360 \times \log_{10} 2$ のビリヤードを考えよう. θ は無理数だから中心から見た角度が $360 \times \log_{10} 7$ と $360 \times \log_{10} 8$ で表される弧をこのビリヤード軌道はいずれ通過する.

$$m \times 360 + 360 \times \log_{10} 7 < n \times 360 \times \log_{10} 2 < m \times 360 + 360 \times \log_{10} 8$$

となる自然数 n, m が存在する.

$$m + \log_{10} 7 < n \times \log_{10} 2 < m + \log_{10} 8$$

となり,

$$7 \times 10^m < 2^n < 8 \times 10^m$$

となるので, そのような n は存在する.

実際は $n = 46 (2^{46} = 70368744177664)$ が最初である.

より一般化してどんな番号列もいずれ出てくる。好きな番号列を取る。例えば 42341591 を取る。すると全く同様にして

$$m + \log_{10} 4.2341591 < n \times \log_{10} 2 < m + \log_{10} 4.2341592$$

となる n が取れる。この n に対し

$$2^n = 42341591***\dots*$$

という形の数になる。

問題 7. フィボナッチ数列 ($a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ で決まる a_n) ではどうか。 a_n の最高桁の数字に 7 は現れるか。

解答. フィボナッチ数列は

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

と表せる。

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \right)$$

だから、

$$\log_{10} a_n = -\frac{1}{2} \log_{10} 5 + n \log_{10} \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \log_{10} \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \right)$$

となる。前問と同様に、 $n \log_{10} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の小数部分は 0 と 1 の間のどの値にも近いものとする。 n は大きいところだけ考えても十分で、すると $\log_{10} \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \right)$ は非常に小さいので影響はほとんどない。具体的には大きな n では $\log_{10} \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \right) < \frac{1}{2} (\log_{10} 8 - \log_{10} 7)$ となる。 $n \log_{10} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の小数部分は $\frac{1}{2} (\log_{10} 8 - \log_{10} 7)$ の幅に必ず現れる。 $m + \log_{10} 7 \leq \log_{10} a_n < m + \log_{10} 8$ を満たす a_n が存在する。

よって、フィボナッチ数列の最初の桁に現れる数はどの数もとる。実際は $a_{25} = 75025$ が最初。

2^n と同様に、フィボナッチ数列でも任意の自然数を与えたときに、上の桁がその数に一致するものが必ず現れる。余談になるが、下 n 桁にどのような数が現れるかという問題も考えられる。

問題 8. m を任意の自然数とする。フィボナッチ数列に下 m 桁が全て 9 になる数が現れることを示せ。

解答. フィボナッチ数列を負の方にも拡張すると $a_0 = 0, a_{-1} = 1, a_{-2} = -1$ である。 $\text{mod} 10^{m+1}$ で考えると $a_{-2} \equiv 999\dots 9$ である。 $\text{mod} 10^{m+1}$ で見たとき (a_n, a_{n+1}) が取りうる場合の数は高々 $10^{2(m+1)}$ で、 (a_n, a_{n+1}) から (a_{n+1}, a_{n+2}) の対応は 1 対 1 だから必ず (a_{-2}, a_{-1}) に戻ってくる。

問題 9. n を任意の自然数とし、 n 桁の任意の数を取る。フィボナッチ数列に下 n 桁がなる数は必ず現れるか。

さて、定理 1 よりビリヤード軌道はいくらでも最初の位置 (速度の向きも含め) の近く戻ってくる。ポアンカレの再帰定理というものの特別な場合である。さらに、いくらでも最初の位置 (速度の向きも含め) の近く戻ってくることは任意のビリヤードで成立する。ポアンカレの再帰定理は有界な範囲で運動をし、エネルギーを保存するような力学のモデルなど多様なシステムで成立する。例えば、箱に閉じ込めた弾性衝突する多粒子系でも成立する。例えば、二つの箱 A, B をくっつけて、 A は真空、 B は何か気体を入れておく。 A と B を通気口を開けて通すと、 B から A に気体が出て、いずれ均等な密度になるであろう。一方、分子を多粒子

のビリヤードだとみなすと、ポアンカレの再帰定理よりいずれ最初の状態の近くに回る時間が存在するので、遠い未来には全ての分子が B に戻ることがわかる。ただし、そうなるためにかかる時間は恐ろしく大きい。 10^{10} 時間といったくらい大きさである。もちろん、その後も直ちに A に分子は入っていき、ほとんどの時間帯では A にも B にも同程度の個数の分子が入っており、長期的な時間に対してみると B に全てが入るような時間はほんの一瞬である。

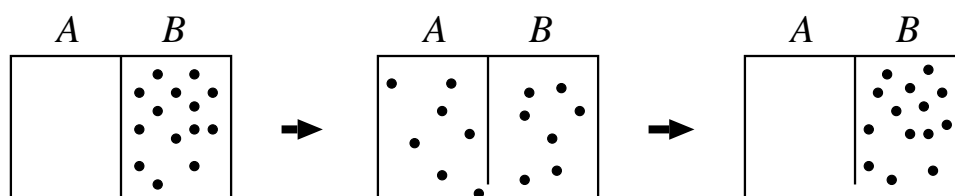


図 8

さて、円のビリヤード軌道を見てみると、円のあらゆる弧に必ず衝突するという性質がありながらも、複雑さよりは規則性を感じるのではないであろうか。円のビリヤードの性質として、各軌道はある円に外接する。その性質は可積分性と呼ばれ、ビリヤードの軌道が複雑でないことと関係している。

4 楕円

凸領域 A をビリヤード台とするビリヤードを考える。

1. A 内の曲線 c が焦線であるとは、ビリヤード軌道が c に接する線分を持たば、その軌道のすべての線分は c に接することをいう。
2. ビリヤードにおいて、焦線たちがぎっしりあるとき、そのビリヤード台は可積分であるという*3。

円のビリヤードでは原点を中心とする円は全て焦線になるので、可積分である。

さて、楕円のビリヤードを計算してみよう。楕円とは円を縦横に拡大や縮小したものである。必ず、綺麗な線に軌道が接していることがわかるであろう。その焦線は(ビリヤード台の楕円と同じ焦点を持つ)楕円あるいは双曲線と呼ばれる曲線である。

予想 1 (バーコフ予想 (1927-1929 年ごろ)). 滑らかな曲線を境界とするビリヤードで可積分なビリヤードは楕円だけである。

いまだに証明されていない。関連する結果を 2 つだけ紹介する。

1. 焦線がきれいな層 (葉層構造という) をなすなら円である (ピアリ, 1993 年)。
2. 円に近い楕円を (楕円でないように) 少し変形すると非可積分になる (アビラ, シモイ, カローシン, 2016 年)。

楕円のビリヤードの焦線は (同じ焦点をもつ) 楕円や双曲線になる。

*3 正確にいうと、滑らかで凸な焦線の集合の内部が空でないことをいう。

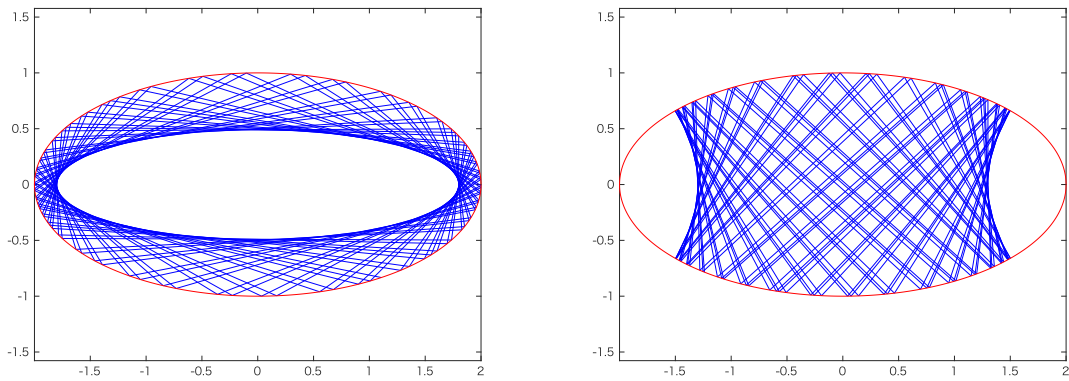


図9 楕円ビリヤード

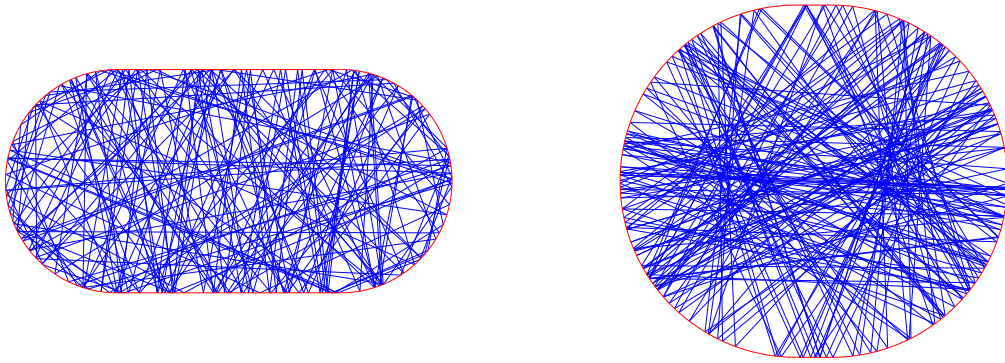


図10 スタジアムビリヤード

5 スタジアム

円の変形版として楕円にしても可積分であった。違う変形を考えてみよう。円を半分に分けて離し、線分でつなげる。いわゆる、スタジアムという形である。すると、軌道は複雑になる。線分の長さはほんのわずかでもあれば円の場合と全く異なる振る舞いをし、複雑になる。

6 マッシュルーム

楕円を長軸に関して半分に分けたらどうなるであろうか。切り口の線分で跳ね返ることは結局、半楕円を裏返して下にくっつけたものとまっすぐ繋がるから、本質的には楕円と変わらない。

では、線分のところに一部底を作って、キノコのような形にしてはどうであろうか。すると初期値によっては、底を通らず楕円のビリヤードの軌道になるものもあるし、底を通ると全く異なる。よって、軌道毎に可積分的な振る舞いをしたり、カオス的な振る舞いをする例である。

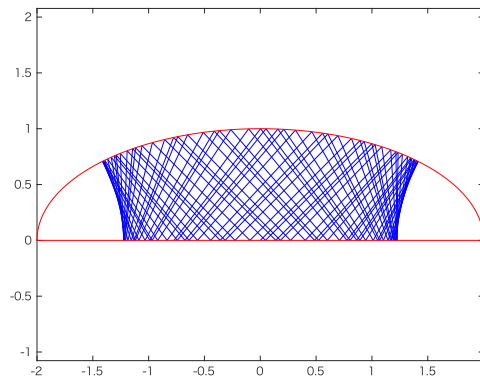


図 11 上半楕円

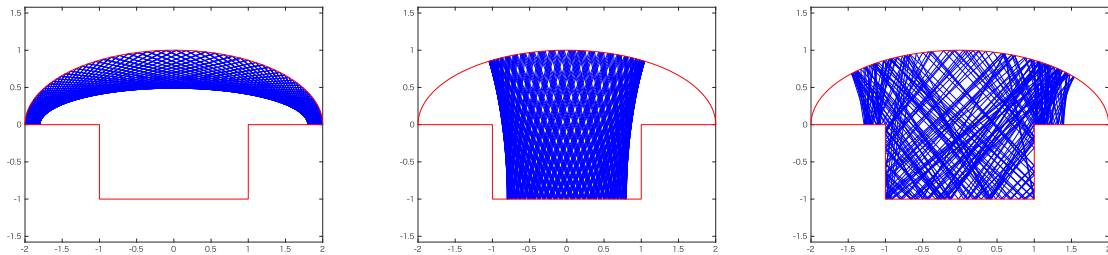


図 12 マッシュルームビリヤード

7 ポアンカレ写像

単純か複雑かということの違いを明確に知るには、実際の軌道を眺めるよりはポアンカレ写像というものを見た方がよい。各々の軌道で軌道全体は必要なく衝突の時の位置がわかればよい。ただ、速度の向きの情報も必要である。実際、ビリヤードの軌道は動き始める時の位置と速度の向きが決まらなると、定まらないからである。衝突するごとに、位置の x 座標を横軸と速度の x 座標を縦軸にとってプロットしていく。これはポアンカレ写像というものになっている。可積分の場合は、滑らかな曲線が描かれる。カオスと呼ばれる複雑な状況の場合は、広くに散りばめられる。

衝突する毎に衝突位置の x 座標と速度の x 座標を取り出し、それぞれ横軸と縦軸とした平面に点でプロットしていく。可積分な場合の特徴としては、ポアンカレ写像で各軌道は滑らかな曲線を描く。

参考文献

- [1] G. Galperin, Billiard balls count π . MASS selecta, 197–204, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2003.
- [2] S. Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, Amer Mathematical Society, 2005.
- [3] 高木貞治, 初等整数論講義, 共立出版

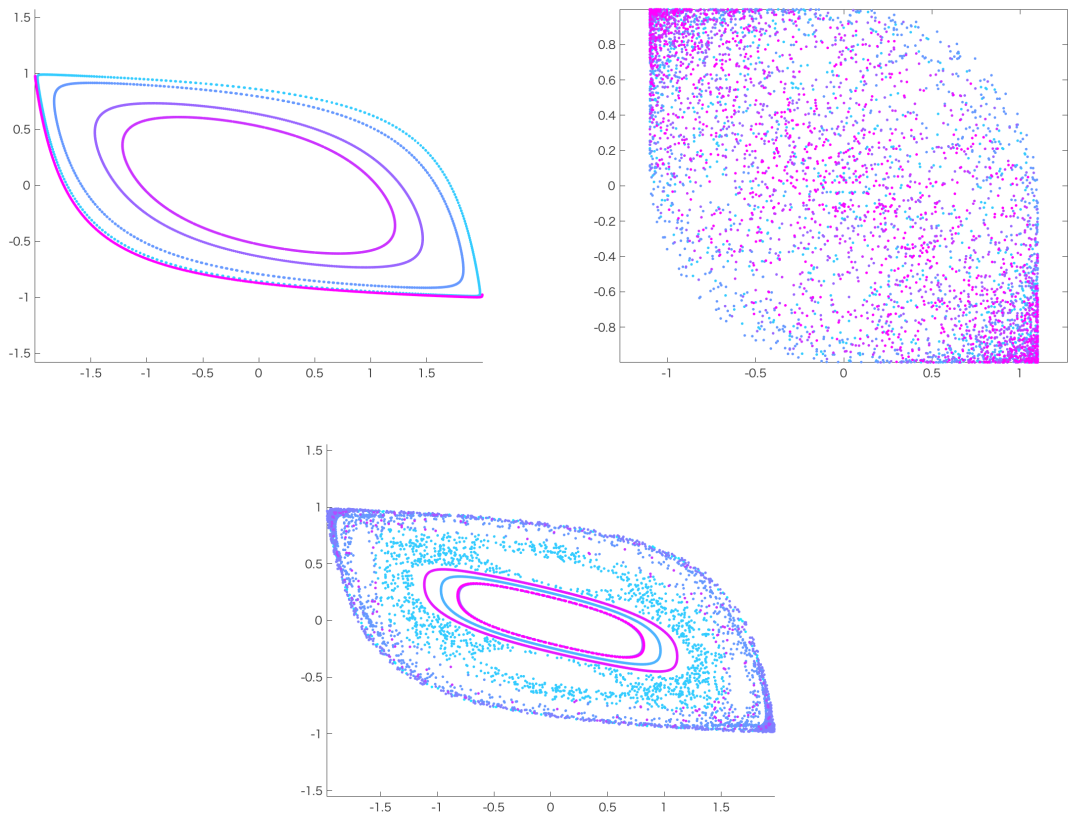


図 13 楕円 (左上) とスタジアム (右上) とマッシュルーム (下) のポアンカレ写像