

# 力学系理論

2017年7月20日



# 目次

第 1 章	カオス	3
1.1	連続力学系と離散力学系	3
1.2	軌道	5
1.3	Van der Pol 方程式	6
1.4	カオスの特徴	10
1.5	初期値に関する敏感な依存性	12
1.6	カオスの定義	13
1.7	カオスが起こる例	15
第 2 章	双曲力学系	19
2.1	位相共役	19
2.2	双曲型不動点近傍の力学系	20
2.3	ホモクリニック点	21
2.4	記号力学系と馬蹄力学系	25
2.5	メルニコフ理論	28
2.6	マルコフ分割	34
第 3 章	様々な力学系理論	37
3.1	低次元力学系	37
3.2	構造安定性	39
3.3	分岐理論	41
3.4	KAM 理論	43
3.5	周期解の変分解析	43
付録 A	補足	45
A.1	常微分方程式の解の存在と一意性	45
A.2	初期値に関する依存性	50
A.3	パラメータを持つ微分方程式	52
A.4	ポアンカレ写像の滑らかさ	53
参考文献		55



---

力学系理論とは、決定論的な法則に従い時間発展により状態が変化するようなシステムの数学的モデルについて長期にわたる挙動を調べる分野である。特に、規則的な振る舞いをする系や特別な性質を持つために解析しやすい可積分系などよりは、カオスと呼ばれる複雑な挙動を示す系が主な研究対象である。ここでは、力学系の基礎理論を学ぶ。特にカオスの定義やカオス的な系の中でも理解可能となっているものを紹介する。さらに詳しい内容に関しては、[1, 3]などを参照せよ。



# 第 1 章

## カオス

計画 4/12

### 1.1 連続力学系と離散力学系

■連続力学系 時間  $t$  が連続的に変化したときある状態の変化を調べたいとする。そのような系は多くの場合、常微分方程式で表される。このような見方をしたとき常微分方程式を連続時間の力学系、あるいは連続力学系という。

$M$  は  $\mathbb{R}^n$  や  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。曲面や多様体でもよい。簡単のため  $v$  が  $t$  によらない微分方程式

$$\dot{x} = v(x) \quad (x \in M) \quad (1.1)$$

を考えよう。このように、 $v$  が  $t$  によらないとき、微分方程式は自励的であるという。 $M$  を相空間という。ここで、任意の初期値と任意の  $t$  について解は存在すると仮定しておく。例えば、 $M = \mathbb{R}^n$  で  $v$  が (大域的に) Lipschitz 条件を満たすとか、 $M$  がコンパクトで  $v$  が局所 Lipschitz 条件を満たせばよい。 $t = 0$  のとき  $x_0$  を通る解を、 $\varphi(t, x_0)$  とする。 $t$  を時間と考えて、 $\varphi(t, x_0)$  が  $x_0$  の状態の時間変化と見ることができる。このような見方で見た場合には、常微分方程式は連続時間の力学系、または連続力学系を定めるという。

$$\varphi(0, x_0) = x_0, \quad \varphi(t, \varphi(s, x_0)) = \varphi(t + s, x_0) \quad (1.2)$$

が成り立つ。

問題 1. (1.2) を、常微分方程式の解の存在と一意性を用いて示せ。

$t$  を固定すると、写像  $x \mapsto \varphi(t, x)$  が定まる。これを、 $\varphi^t : M \rightarrow M$  と書いて、時間  $t$  写像という。とくに、 $\varphi^1$  を単位時間写像という。(1.2) は、

$$\varphi^0 = \text{id}_M, \quad \varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{s+t} \quad (1.3)$$

と表せる。また、 $\varphi^{-t} = (\varphi^t)^{-1}$  が成り立つので、 $\varphi^t$  は可逆である。このような性質を満たす  $M$  上の写像の 1 パラメータ族  $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  を流れ (flow) ともいう。

注意 1.1. 常微分方程式により定まる  $\varphi^t$  は、任意の初期値  $x_0$  と任意の  $t \in \mathbb{R}$  について  $\varphi(t, x_0)$  が定まるようであれば可逆であった。これに対し、 $t \geq 0$  に対して定義される  $\varphi^t : M \rightarrow M$  で  $s \geq 0, t \geq 0$  に対して (1.3) を満たすものを非可逆な連続力学系という。本講義では、連続力学系については可逆なもののみを扱うことにする。

■**離散力学系** 離散時間の発展に伴う現象の変化を調べることもある。状態を表す点の集合を  $M$  とし、時間  $n \in \mathbb{Z}$  での状態が点  $x_n \in M$  で表されるとする。次の時間  $n+1$  の状態を表す点  $x_{n+1} \in M$  が写像  $f: M \rightarrow M$  により  $x_{n+1} = f(x_n)$  と表されるとする。つまり、時間  $n+1$  での点  $x_{n+1}$  は、時間  $n$  での点  $x_n \in M$  だけで決まり ( $n$  にはよらない)、その対応を  $f$  で表すことにする。初期値  $x_0$  から出る解  $\varphi(n, x_0)$  は  $\varphi(n, x_0) = x_n = f^n(x_0)$  と表す\*1。この場合、 $m, n \geq 0$  に対して (1.2) と同様の式、

$$\varphi(0, x_0) = x_0, \quad \varphi(m, \varphi(n, x_0)) = \varphi(m+n, x_0) \quad (1.4)$$

が成り立つ。また、 $f$  が可逆、つまり全単射写像であれば、 $n < 0$  に対しては  $\varphi(n, x_0) = x_n = (f^{-1})^n(x_0)$  と定義することにより、任意の  $m, n \in \mathbb{Z}$  に対して、(1.4) が成り立つ。

そこで、写像

$$f: M \rightarrow M$$

を  $M$  上の離散時間の力学系、または離散力学系という。この場合も、 $M$  を相空間という。

■**ポアンカレ写像** 連続力学系と離散力学系は密接な関係がある。 $n$  次元相空間  $M$  上の常微分方程式 (A.1) が与えられたときに、 $M$  の  $n-1$  次元部分空間  $\Sigma$  で、 $\Sigma$  の各点で軌道が横切るようなものとする。つまり、 $x \in \Sigma$  に対して、 $v(x) \notin T_x \Sigma$  とする。さらに、 $x$  を出る軌道が  $y$  で再び  $\Sigma$  と交わるとする。これにより、写像  $x \in \Sigma \mapsto y \in \Sigma$  が定まる。これをポアンカレ写像という。連続力学系の情報の多くは、ポアンカレ写像の離散力学系から得られる。ポアンカレ写像は滑らかであることは、陰関数の定理より示される。

常微分方程式により定まる連続的な力学系を考えたとき、そのポアンカレ写像  $f$  は一般には明示的には表せない。しかし、この例のように、離散化してポアンカレ写像の性質が分かれば、その微分方程式の力学系の本質的な部分がよく分かる。

**注意 1.2.** 非自励的な微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t)$$

の場合、初期条件  $x(t_0) = x_0$  を満たす解  $x(t)$  は、 $\varphi(t, t_0, x_0)$  と表される。このような微分方程式の場合は、形式上、未知関数を1つ増やすことにより自励的な微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = v(x, s), \quad \frac{ds}{dt} = 1$$

にできる。これにより、非自励的な微分方程式もポアンカレ写像をとって離散力学系を構成できる。

よく扱われるのは、 $v(x, t)$  が周期的な場合、つまりある  $T > 0$  に対し、 $v(x, t+T) = v(x, t) (\forall x \in M, \forall t \in \mathbb{R})$  が満たされる場合で、ポアンカレ写像として  $x \in M \mapsto \varphi(T, 0, x) \in M$  が取られる場合が多い。

■**懸垂** 逆に、離散力学系  $f: M \rightarrow M$  が与えられたとき、懸垂 (suspension) という操作により、 $M$  より1次元が高い多様体  $N$  とその上の連続力学系が構成できる。 $M \times [0, 1]$  を考え、 $(x, 1)$  と  $(f(x), 0)$  を同一視すると、この同一視によりできた空間を  $N$  とする。

\*1  $f^0(x) = x$  で  $f^n(x)$  は  $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_n(x)$  である。



$N$  上の流れは  $\varphi^t(x, s) = (f^{\lfloor t+s \rfloor}(x), t+s - \lfloor t+s \rfloor)$  により定める.  $N$  の中に  $M$  が部分多様体として含まれ,  $M$  上で定まるポアンカレ写像は  $f$  になる.

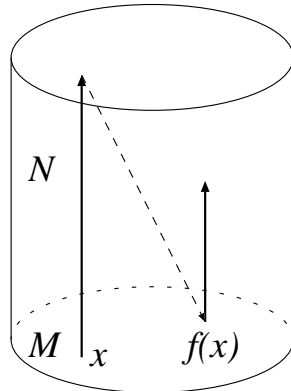


図 1.1 懸垂

まとめると,  $N$  次元の相空間における自励的な連続力学系 (常微分方程式) は  $N - 1$  次元の空間における可逆な離散力学系に対応する. 常微分方程式は可逆なので, 対応する離散力学系も可逆になる. 本講義では, 離散力学系について述べる部分が多いが, ポアンカレ写像や懸垂を通して連続力学系でも同様の議論ができる.

4/19

## 1.2 軌道

離散力学系  $f : M \rightarrow M$  と  $x \in M$  に対して,

$$O_+(x) = \{f^n(x) \mid n \geq 0\}$$

を  $x$  の軌道 (正確には正の半軌道) という. ある  $p \geq 1$  について  $f^p(x) = x$  となるとき,  $x$  を周期点という. 特に,  $p = 1$  のとき  $x$  を不動点という.  $x$  が周期点のとき  $O_+(x)$  は有限個の点からなり, 不動点のときは 1 点からなる.  $f$  が可逆の場合は, 負の  $n$  を込めた軌道

$$O(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

を考えることが多い.

連続力学系  $\varphi^t(x)$  について,  $x$  の軌道を

$$O(x) = \{\varphi^t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

により定める. すべての  $t > 0$  について  $\varphi^t(x) = x$  が成り立つとき,  $x$  を平衡点といい, 微分方程式に関しては対応する解を定常解という. このとき,  $O(x)$  は 1 点である. また, ある  $T > 0$  について  $\varphi^T(x) = x$  が成り立つとき,  $O(x)$  を周期  $T$  の周期軌道といい, 微分方程式に関しては対応する解を周期解という.  $x$  が平衡点でなく,  $\varphi^t(x)$  が周期解であれば,  $O(x)$  は単純閉曲線である.

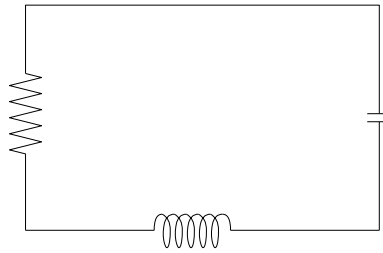


図 1.2

### 1.3 Van der Pol 方程式

Van der Pol 方程式という微分方程式を通して，力学系的手法を概観しておこう．通常力学系理論で扱う微分方程式は解けない．解けないが，幾何的な観点や不等式による評価などにより解の振る舞いの理解を試みる．また，Van der Pol 方程式のポアンカレ写像の性質も導く．

抵抗，コイル，コンデンサーを持つ回路（図 1.2）上のコイルを流れる電流  $x$  とコンデンサーの電圧  $y$  の時間  $t$  に関する変動は常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - f(x) \\ \frac{dy}{dt} &= -x\end{aligned}$$

に従う． $f$  は抵抗における電圧と電流の関係を決める関数である．オームの法則に従うような抵抗だと  $f$  は線形であるが，ここでは， $f(x) = x^3 - x$  の場合の微分方程式を考える．この場合の微分方程式を Van der Pol 方程式という．Van der Pol 方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - x^3 + x \\ \frac{dy}{dt} &= -x\end{aligned}$$

の解の振る舞いを詳しく見ておこう．

この微分方程式の右辺のいずれかが 0 になる点の集合は以下の 4 つの集合と原点である．

$$\begin{aligned}v^+ &= \{(x, y) \mid x = 0, y > 0\} \\ v^- &= \{(x, y) \mid x = 0, y < 0\} \\ g^+ &= \{(x, y) \mid x > 0, y = x^3 - x\} \\ g^- &= \{(x, y) \mid x < 0, y = x^3 - x\}.\end{aligned}$$

$v^+$  上の点では  $\frac{dx}{dt} > 0$ ,  $\frac{dy}{dt} = 0$  であるから  $v^+$  上の点における解の接線（ベクトル場）は  $x$  軸に平行で正の向きである． $g^+$  場では， $y$  軸に平行で負の向きである． $v^+$  と  $g^+$  に挟まれた領域，つまり

$$A = \{(x, y) \mid x > 0, y > x^3 - x\}$$

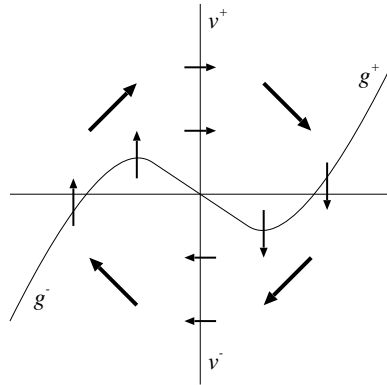


図 1.3 Van der Pol 方程式の流れ

では  $\frac{dx}{dt} > 0$ ,  $\frac{dy}{dt} < 0$  であるからこの領域で解の接線は右下を向いている. 同様の考察を他の領域でも行くと, 解の接線は図 1.3 のようになることが分かる. 大雑把には, 解は原点の周りを時計回りに回っていることが読み取れる.

$(0, y) \in v^+$  から始まる軌道は原点の周りを一周して再び  $v^+$  に交わることを示そう.  $(x(0), y(0)) \in v^+$  となる解を考える.

**命題 1.1.**  $t_1 > 0$  で  $(x(t_1), y(t_1)) \in g^+$  となる.

**証明.**  $x(0) = 0$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = y(0) > 0$  であるから十分小さい  $t > 0$  では  $(x(t), y(t)) \in A$  である.  $(x(t), y(t))$  が  $A$  に属する間は  $x(t)$  は  $t$  に関して単調増加,  $y(t)$  は単調減少である.  $y = y(0)$ ,  $v_+$ ,  $g_+$  で囲まれる領域に入り, この領域から出るとすると  $g_+$  からである.

出ないとすると, この領域内に留まることであるが, それがあり得ないことを示そう. 十分小さい  $t_0 > 0$  をとり固定しておく,  $(x(t_0), y(t_0)) \in A$  で  $(x(t), y(t))$  が  $A$  に属する間は  $x(t) \geq x(t_0)$  が成り立つ.

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \int_0^t \frac{dy}{dt} dt = y(0) - \int_0^t x(t) dt = y(0) - \int_0^{t_0} x(t) dt - \int_{t_0}^t x(t) dt \\ &\leq y(0) - \int_0^{t_0} x(t) dt - x(t_0)(t - t_0) \end{aligned}$$

となるので, 必ず  $g^+$  と交わる. □

同様にして, 次は  $v^-$  と交わり, その次は  $g^-$  と交わり, そして再び  $v^+$  と交わる. これによりポアンカレ写像  $\sigma: v^+ \rightarrow v^+$  が定まる.  $\sigma$  は連続で, 全単射である. このことは, 厳密には微分方程式の初期値問題の解が一意的に存在し, 初期値の変動に関して連続であることから従う.

その点を,  $\sigma(y)$  と表す. この  $\sigma: v^+ \rightarrow v^+$  がポアンカレ写像である.  $\sigma$  は以下のような性質を持つ. 必要に応じて,  $v^\pm$  の点は  $y$  成分をとることにより実数と同一視することもある.

**命題 1.2.**  $\sigma(p_0) = p_0$  となる  $p_0$  がただ一つ存在する.  $0 < p < p_0$  については,  $\sigma(p) > p$  を満たす.  $p > p_0$  のときは,  $\sigma(p) < p$  を満たす.

**証明.**  $p \in v^+$  に対し, 次に  $v^-$  と交わる点を  $\alpha(p)$  と表す. 写像  $\delta: v^+ \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\delta(p) =$

$|\alpha(p)|^2 - |p|^2$  により定義する.  $\delta(p)$  は単調減少関数であることを示す.  $p \in v^+$  に対し,  $(x(0), y(0)) = p$  となる解  $(x(t), y(t))$  について,  $(x(t), y(t)) \in v^-$  となる最小の  $t$  を  $t_2(p)$  とおく. この解について

$$\begin{aligned} \delta(p) &= (y(t_2(p)))^2 - (y(0))^2 \\ &= (x(t_2(p)))^2 + (y(t_2(p)))^2 - (x(0))^2 - (y(0))^2 \\ &= \int_0^{t_2(p)} \frac{d}{dt} ((x(t))^2 + (y(t))^2) dt \\ &= 2 \int_0^{t_2(p)} x(t) \frac{dx}{dt}(t) + y(t) \frac{dy}{dt}(t) dt \\ &= 2 \int_0^{t_2(p)} x(t)(y(t) - x(t)^3 + x(t)) + y(t)(-x(t)) dt \\ &= 2 \int_0^{t_2(p)} x(t)^2(1 - x(t)^2) dt \end{aligned}$$

と表せる.

ある  $r \in v^+$  が一意に存在して, これを初期値とする軌道が  $(1, 0) \in g^+$  を通る. このことは,  $(1, 0)$  を初期値とする解を時間逆向きに辿って  $v^+$  と交わる点を  $r$  とすれば取れる.

$0 < p < r$  なら,  $t \in (0, t_2(p))$  で  $x(t) < 1$  なので  $\delta(p) > 0$  である.

$p > r$  とする.  $x(t) = 1$  となる  $t \in [0, t_2(p)]$  は2つあるので, それらを  $s_1(p) < s_2(p)$  とする.  $\delta(p)$  を以下の通り  $\delta_1(p) + \delta_2(p) + \delta_3(p)$  と分けてそれぞれが単調減少であることを示す.

$[0, s_1(p)]$  で解の  $y(t)$  は  $x(t)$  のグラフになっているから  $y$  は  $x$  の関数と考えて,

$$\begin{aligned} \delta_1(p) &= \int_0^{s_1(p)} x(t)^2(1 - x(t)^2) dt \\ &= \int_0^1 x^2(1 - x^2) \frac{dt}{dx} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^2(1 - x^2)}{y - x^3 + x} dx \end{aligned}$$

となる. ここで,  $p$  が増加すると各  $x \in [0, 1]$  で  $y$  は増加するから,  $\delta(p)$  は減少する.

$[s_1(p), s_2(p)]$  で解は  $y$  の関数として表す.  $y_+ = y(s_1(p)), y_- = y(s_2(p))$  おくくと,

$$\begin{aligned} \delta_2(p) &= \int_{s_1(p)}^{s_2(p)} x(t)^2(1 - x(t)^2) dt \\ &= \int_{y_+}^{y_-} x^2(1 - x^2) \frac{dt}{dy} dy \\ &= \int_{y_+}^{y_-} -x(1 - x^2) dy \\ &= \int_{y_-}^{y_+} x(1 - x^2) dy < 0 \end{aligned}$$

となり,  $p$  が大きくなると  $[y_-, y_+]$  の範囲は大きくなるので,  $\delta_2(p)$  も単調減少である.  $p$  が限りなく大きくなると, 対応する曲線は右に移動していき,  $y$  を固定したとき  $x(1 - x^2)$  がとる値も限りなく小さくなっていく. よって,  $p \rightarrow \infty$  のとき  $\delta_2(p) \rightarrow -\infty$  である.

$[s_2(p), t_2(p)]$  については,  $\delta_1(p)$  と同様にして,

$$\begin{aligned}\delta_3(p) &= \int_{s_2(p)}^{t_2(p)} x(t)^2(1-x(t)^2)dt \\ &= \int_1^0 x^2(1-x^2)\frac{dt}{dx}dx \\ &= -\int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{y-x^3+x}dx\end{aligned}$$

となり, 被積分関数の分母が負であることに注意すると,  $p$  が増加すると  $y$  は減少することにより  $\delta_3(p)$  も減少する.

また,  $p \rightarrow \infty$  のとき  $\delta_2(p) \rightarrow -\infty$  となることも分かったので,  $\delta(p) \rightarrow -\infty$  である.

以上のことから,  $\delta(p)$  は  $0 < p < r$  では正の値をとり,  $p > r$  では単調減少で,  $p \rightarrow -\infty$  のとき  $-\infty$  に発散することが分かった.

次に,  $v^-$  から  $v^+$  へ向かう軌道についても同様の考察をしなければならないが, こちらは実は  $v^+$  から  $v^-$  へ向かう軌道の振る舞いと本質的に同じである. この微分方程式のすべての項が奇数次であることから,  $(x(t), y(t))$  が解ならば  $(-x(t), -y(t))$  も解である. したがって,  $p \in v^-$  を初期値とする解が  $v^+$  と次に交わる点は  $|\alpha(|p|)|$  である. よって,  $\sigma(p) = \alpha(|\alpha(p)|)$  である.

さて,  $\alpha$  の性質としてはある  $p_0 \in v^+$  があって  $\alpha(p_0) = p_0$  が成り立ち,  $p < p_0$  なら  $|\alpha(p)| > |p|$ ,  $p > p_0$  なら  $|\alpha(p)| < |p|$  が成り立つ.

よって,  $\sigma(p_0) = p_0$  が成り立ち,  $p < p_0$  なら  $\sigma(p) > p$ ,  $p > p_0$  なら  $\sigma(p) < p$  が成り立つ.  $\square$

このことから, 原点を除くほとんどの軌道は,  $p_0$  を通る周期軌道に収束する.

これで, ポアンカレ写像  $\sigma$  の軌道が分かった. 元の 2 次元の微分方程式の振る舞いに対応しており,  $\sigma$  による点の振る舞いが本質的な性質を捉えていることが分かるであろう.

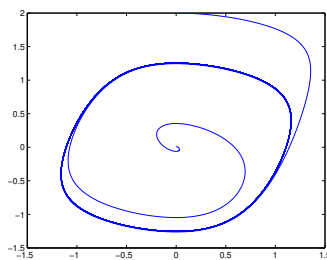


図 1.4 Van der Pol 方程式の解

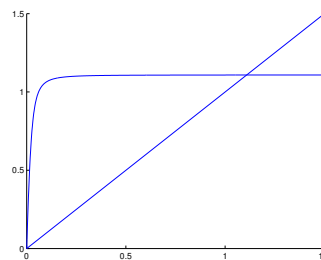


図 1.5  $q = \sigma(p)$  と  $q = p$  のグラフ

## 1.4 カオスの特徴

カオスとは、力学系の不規則で複雑な振舞を指す。しかし、全面的に支持されているようなカオスの数学的な定義は確立されていない。

ここでは、提案されているいくつかのカオスの定義を紹介する。その前に例をみて、カオスの定義によりどのような性質を特徴づければ良いのかを考察しておこう。

■ローレンツ方程式 連続力学系の例だがカオス的な振舞をする有名な例として、ローレンツ方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -px + py \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}$$

がある。  $p, r, b$  は定数であり、具体的には  $p = 10, r = 28, b = 8/3$  である。これは、気象を数学的にモデル化したもので、非常に複雑な軌道が現れる。僅かに初期値が異なるだけで、ある程度時間が経過すると大きな違いとなるのが、この方程式では実際に起こる。解は1.6のように、右と左の部分ランダムに選ぶようにして巻き付いてということ繰り返す。このことが天気予報が困難であることの1つの説明になっているとも言える。この現

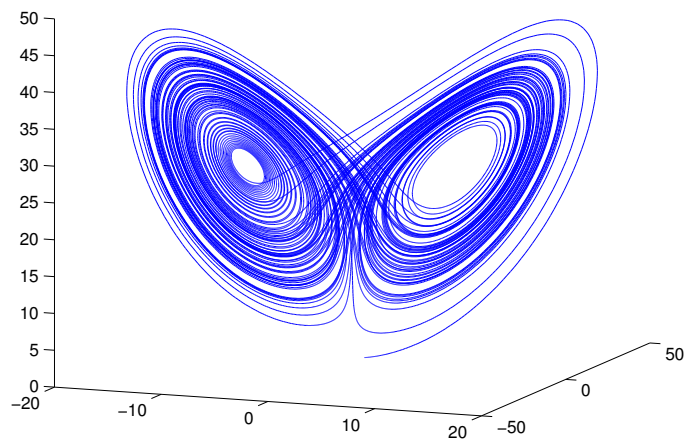


図 1.6 ローレンツアトラクター

象はローレンツによる講演タイトル「ブラジルの1匹の蝶の羽ばたきはテキサスで竜巻を引き起こすか？」により有名になり、バタフライ効果と呼ばれることもある。この現象は複雑さを感じさせるのは、初期値がわずかに違っても十分時間が経過すると大きな違いが現れることではないだろうか。

■リ-ヨークの定理 リとヨークは「周期3がカオスを導く」というタイトルの論文で次の定理を証明した。

定理 1.1 (リ-ヨーク).  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が連続で,  $f^3(a) = a (f(a) \neq a)$  となる  $a \in \mathbb{R}$  が存在するとする. このとき, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し,  $f^n(p) = p$  かつ  $f^k(p) \neq p (1 \leq k < n)$  となる  $p \in \mathbb{R}$  が存在する.

この定理を証明しよう.  $a = f^3(a) < f(a) < f^2(a)$  と仮定する. それ以外の場合も以下でとる区間の順序などを取り替えれば, 同じように証明できる.  $I_1 = [a, f(a)], I_2 = [f(a), f^2(a)]$  とおく.  $I_1$  の  $f$  による像  $f(I_1) = \{f(x) \mid x \in I_1\}$  は連結で,  $f(a), f^2(a)$  を含むので,  $I_2 \subset f(I_1)$  が成り立つ.

$I_2$  の  $f$  による像は  $a, f^2(a)$  を含むので,  $I_1 \cup I_2 \subset f(I_2)$  が成り立つ.

区間  $I, J$  について  $f(I) \supset J$  が成り立つとき,  $I \rightarrow J$  と表すことにしよう. 上記のことから,  $I_1 \rightarrow I_2, I_2 \rightarrow I_1, I_2 \rightarrow I_2$  が成り立つ.

補題 1.1. 有界閉区間  $I$  について  $I \rightarrow I$  が成り立つとき,  $f(c) = c$  となる  $c \in I$  が存在する.

証明.  $I = [a, b]$  とする.  $f(I) \supset I$  であるから,  $f(r) = a, f(s) = b$  となる  $r, s \in I$  が存在する.  $g(x) = f(x) - x$  とする.  $g(r) = f(r) - r = a - r \leq 0, g(s) = f(s) - s = b - s \geq 0$  が成り立つ. 中間値の定理より  $g(c) = 0$  となる  $c$  が  $r$  と  $s$  の間に存在する.  $r, s \in I$  であるからこの  $c$  も  $I$  に属する.  $\square$

この補題より,  $I_2 \rightarrow I_2$  であるから  $f(p) = p$  となる  $p \in I_2$  が取れる. これで, 定理の  $n = 1$  の場合が示せた.

$n = 2$  の場合を考える.  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1$  であることに着目し,  $p \in I_1, f(p) \in I_2, p = f^2(p)$  となる  $p$  が存在することを示そう.

$$\begin{aligned} x_1 &= \sup\{x \in I_1 \mid f(x) = f(a)\} \\ x_2 &= \inf\{x \in I_1 \mid x \geq x_1, f(x) = f^2(a)\} \end{aligned}$$

とおく.  $x_1, x_2$  は定まり,  $[x_1, x_2] \subset I_1, f([x_1, x_2]) = I_2$  であることを確かめよう.  $a \in \{x \in I_1 \mid f(x) = f(a)\}$  であることからこの集合は空でなく, 上に有界だから上限 ( $= x_1$ ) は存在する. また,  $f(a) \in \{x \in I_1 \mid x \geq x_1, f(x) = f^2(a)\}$  であるから, この集合も空でなく下に有界であるから  $x_2$  が定まる.  $f([x_1, x_2]) \supset I_2$  は自明である. また,  $f([x_1, x_2]) = I_2$  でなければ,  $x_1$  はより大きく, あるいは  $x_2$  はより小さく取ることができるので, 上限, 下限で定義されていることに反する.

さて,  $I_2 \rightarrow I_1$  より  $f^2([x_1, x_2]) = f(I_2) \supset I_1 \supset [x_1, x_2]$  である. 再び, 中間値の定理より,  $f^2(p) = p$  となる  $p \in [x_1, x_2]$  が存在する. なお,  $p \in I_1, f(p) \in I_2$  より  $p$  は不動点でない.

$n = 3$  の場合は, 定理の仮定そのものである.  $n \geq 4$  の場合は

$$\underbrace{I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_2 \rightarrow I_1}_n$$

という列が取れるから, 上記を帰納的に行うことで,  $p = f^n(p) \in I_1, f^k(p) \in I_2 (1 \leq k < n)$  となる  $p$  が存在することが示される.  $\square$

この定理を満たす力学系から複雑さのようなものを感じるとすれば、それは非常に多様な軌道が混在していることにあるであろう。

■カオスとは 以上の2つのケースは、カオスの特徴づける性質に「初期値に関する敏感な依存性」と「軌道の多様性」があることを示唆している。カオスとは「初期値に関する敏感な依存性」と「軌道の多様性」をともに備えたものだとして定義するのが妥当だと考えられる。

## 1.5 初期値に関する敏感な依存性

「初期値に関する敏感な依存性」の数学的に定義しよう。初期値が少しでも異なればいずれ大きく離れるという意味では、分離的という概念が考えられる。

**定義 1.1.** 可逆力学系  $f : M \rightarrow M$  が分離的であるとは、ある  $C > 0$  が存在して、任意の異なる2点  $x_0, y_0 \in M$  に対して、適当な  $N \in \mathbb{Z}$  をとれば  $d(f^N(x_0), f^N(y_0)) > C$  となることをいう。

しかし、様々な力学系を調べると、どの2点も互いにいずれ離れるという条件は、かなり強すぎる。実際にカオスとみなすべき力学系では、離れる方向と近づく方向の両方を持つ。そこで、グッケンハイマーにより与えられた次の定義を紹介しておく。

**定義 1.2.** 離散力学系  $f : M \rightarrow M$  が初期値に関する敏感な依存性を持つとは、ある  $C > 0$  が存在して次を満たすことである。任意の  $x_0 \in M$  とその近傍  $U$  を任意にとったとき、 $y_0 \in U$  をうまく選ぶと、

$$d(f^N(x_0), f^N(y_0)) > C$$

を満たす  $N$  が存在する。

同じことだが、より論理的に表現すると、

$$\exists C > 0, \forall x_0 \in M, U : x_0 \text{ の近傍}, \exists y_0 \in U, \exists N > 0, d(f^N(x_0), f^N(y_0)) > C$$

となる。

このような性質を表すより強い条件は次のものである。

初期値に関する敏感な依存性を数値として表すものとして、リャプノフ数がある。

**定義 1.3.** 力学系  $f : M \rightarrow M$  と点  $x \in M$  について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |D(f^n)(x)v|$$

を  $x$  を通る軌道のリャプノフ数という。

この値は、ほとんどすべての  $v$  について一定の値をとることが証明されているので、 $v$  によらない定義となっている。  $D(f)(x)$  は写像  $f$  の  $x$  におけるヤコビ行列である。また、合成関数の微分法より

$$D(f^n)(x) = Df(f^{n-1}(x))Df(f^{n-2}(x)) \dots Df(x)$$

が成り立つ。リャプノフ数が正であれば、その力学系は初期値に関する敏感な依存性を持つと考えてよい。



問題 2.  $f(x) = 2x(x \in \mathbb{R})$  のリャプノフ数を求めよ.

5/10

「軌道の多様性」も含め複雑さを数値として表すものに、位相的エントロピーがある.

$X$  を距離空間とし、 $d$  をそこに定まっている距離とする.  $f: X \rightarrow X$  を連続な写像とする.  $S \subset X$  が  $(n, \varepsilon)$  分離的であるとは、 $S$  の任意の 2 点  $x, y (x \neq y)$  に対して、ある  $0 \leq j \leq n-1$  があって  $d(f^j(x), f^j(y)) \geq \varepsilon$  となることをいう.

$X$  がコンパクトの場合をまず考える.  $f: X \rightarrow X$  を連続写像とする.  $(n, \varepsilon)$  分離的な部分集合の元の個数の最大値を  $\text{sep}(n, \varepsilon)$  とおく. これが、 $n \rightarrow \infty$  のときに、 $C \cdot \alpha^n$  の速さで増大するときに、 $\log \alpha$  を位相的エントロピーという. 厳密には、 $f: X \rightarrow X$  の位相的エントロピーを

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{sep}(n, \varepsilon)$$

により定義する.

$X$  がコンパクトでないときは、 $f: X \rightarrow X$  を一様連続写像の場合のみ考えられ、 $X$  のコンパクト部分集合  $K$  中の  $(n, \varepsilon)$  分離的な部分集合の元の個数の最大値を  $\text{sep}(n, \varepsilon; K)$  とおく.  $f: X \rightarrow X$  の位相的エントロピーを

$$h(f) = \sup \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{sep}(n, \varepsilon; K) \mid K \text{ は } X \text{ のコンパクト部分集合} \right\}$$

により定義する.

位相的エントロピーが正であれば、初期値に関する敏感な依存性をもつ軌道の個数を評価しており、カオスであることを示唆している. 実際、位相的エントロピーが正であるような力学系の多くは、複雑な振舞をする.

問題 3.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x(x \in \mathbb{R})$  の位相的エントロピーを求めよ.

## 1.6 カオスの定義

全面的に支持されているカオスの定義はまだ存在せず、カオスの定義を与えること自体が現在でも重要な問題であるといえる. ここでは、いくつか提案されている定義を紹介するが、それぞれに一長一短がある. 各々がカオスと認めるのが自然な系のほとんどを含んでいるが、カオスでないものを含んでしまっていたり、カオスにすべきいくつかの系を含まなかったりする. カオスが捉えにくいことを実証していると言える.

$f: M \rightarrow M$  において、ある  $n > 0$  について  $f^n(x_0) = x_0$  を満たす  $x_0 \in M$  を周期点といい、このとき  $\{x_k\}_{k=0}^{n-1} (x_k = f^k(x_0))$  を周期軌道という.

定義 1.4 (リ・ヨーク). 力学系  $f: M \rightarrow M$  は次を全て満たすときカオス的であるという:

1. 周期の異なる無限個の周期軌道をもつ
2.  $M$  の非可算無限集合  $S$  で、次を満たすものが存在する:

(a)  $S$  の異なる 2 点  $x, y$  について

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$$

(b)  $S$  の任意の点  $x$  と任意の周期点  $p$  について,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(p)) > 0$$

が成り立つ

この定義はちょっと捉えにくいかもしれない。  $M$  がコンパクトで  $f$  が  $C^2$  で位相的エントロピーが正なら、リ・ヨークの意味でカオス的であることが証明されている。

**定義 1.5.**  $f: M \rightarrow M$  を離散力学系とする。

1.  $\Sigma \subset M$  が  $f$  の不変集合であるとは、 $f(\Sigma) = \Sigma$  が成り立つことである。
2.  $f: M \rightarrow M$  の不変集合  $\Lambda$  がアトラクタ\*2であるとは、 $\Lambda$  を含む開集合  $U$  で  $f(U) \subset U$  かつ  $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$  が成り立つことである。
3.  $f$  が不変集合  $\Lambda$  上で位相推移的であるとは、 $\Lambda$  内の空でないどんな開集合  $U, V$  に対しても  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  となる自然数  $n$  がとれることを言う。
4.  $f$  が不変集合  $\Lambda$  上で位相混合的であるとは、 $\Lambda$  内の空でないどんな開集合  $U, V$  に対しても、自然数  $n_0$  がとれて、全ての  $n \geq n_0$  に対して  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  となることを言う。

位相混合性は位相推移性よりも明らかに強い条件であり、カオスを定める性質としても強すぎるが、のちに紹介する力学系には位相混合性を持つものがあるので、ここで述べておいた。

**定義 1.6** (ドゥヴェイニー). 力学系  $f: M \rightarrow M$  が不変集合  $V$  上でカオス的とは以下が成り立つことである:

1.  $f$  は  $V$  上で位相推移的である。
2.  $V$  内で周期点は稠密にある。

ドゥヴェイニーの意味でカオスのとき、グッケンハイマーの意味で初期値に関する敏感な依存性も成り立つことが示されている。ロビンソンは、[3] で次のように定義している。

**定義 1.7** (ロビンソン). 力学系  $f: M \rightarrow M$  が不変集合  $V$  上でカオス的とは以下が成り立つことである:

1.  $f$  は  $V$  上で位相推移的である。
2.  $f$  は  $V$  で初期値に関する敏感な依存性をもつ。

ここで、不変集合  $V$  で  $f$  がカオス的という言い方をしたが、これから  $f$  自身がカオス的であるとうことを定義するには、カオス的不変集合  $V$  が何らかの意味で安定であるという条件が課される。例えば、 $f$  がアトラクタ  $V$  上でカオス的であれば、 $f$  はカオス的

\*2 アトラクタについてもいくつか異なる定義が提案されているので注意。

あると定義されることもある。または、 $f$  が不変集合  $\Lambda$  上でカオス的で  $\Lambda$  がリャプノフ安定\*<sup>3</sup>であれば  $f$  がカオスであるという定義もある。このように不変集合の安定性にもいくつかの種類があるので、その意味でもカオスの定義は多様に考えられ、完全な定義を定めることも困難である。

なお、相空間自身はアトラクタであるので、相空間を不変集合と考えてその上でカオス的であれば、その力学系自体カオス的であると言える。

$x \in M$  の軌道の時間無限大での極限点全体を  $\omega$  極限集合といい、 $\omega(x)$  とあらわす。すなわち、

$$\omega(x) = \{y \in M \mid \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}, \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y\}$$

である。時間の負の無限大の極限点は  $\alpha$  極限集合といい、 $\alpha(x)$  と表す。すなわち、

$$\alpha(x) = \{y \in M \mid \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}, \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = -\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y\}$$

**定義 1.8** (パリス・タケンス). 力学系  $f : M \rightarrow M$  の軌道  $\{x_n\}$  がカオス的とは、定数  $C > 0$  が存在して、 $q \in \omega(x_0)$  に任意に近い  $x_{n_1}, x_{n_2}$  に対して、ある  $n > 0$  をとると

$$d(x_{n_1+n}, x_{n_2+n}) > C$$

が成り立つということである。そして、カオス的な軌道全体の集合が  $M$  で正の体積を持つとき、 $f$  はカオス的という。

以上に挙げたカオスの定義はいずれもカオスをうまく特徴づけているものであるが、完全なものではない。各々の定義に関する問題点に関しては、[1, 3] を参照されたい。

5/17

## 1.7 カオスが起こる例

まず、カオスでない例を挙げる。

**例 1.1.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) = 2x$  で定める。  $x, y \in \mathbb{R}$  で  $x \neq y$  とする。  $|x - y| = d$  とすると  $|f^n(x) - f^n(y)| = 2^n|x - y| = 2^n d$  で  $n$  を十分大きくとると  $2^n d > 1$  となるので分離的である。当然、グッケンハイマーの意味で初期値に関する敏感な依存性をもつ。リャプノフ数も正であった。

$U = (3, 4), V = (1, 2)$  とすると  $f^n(U) \cap V = \emptyset$  なので位相推移的ではない。また、周期点も 0 しかない。よって、ドゥヴェイニーの意味でカオスでない。

実際、軌道は、0 のままか、増加しながら  $+\infty$  に発散するか減少しながら  $-\infty$  に発散するかというものしかないので、カオスと呼べるようなものではないであろう。初期値に関する敏感な依存性だけではカオスと特徴付けられないという例になっている。

**例 1.2.**  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  とする。  $\alpha \in \mathbb{R}$  を定数とし、力学系  $f : S^1 \rightarrow S^1$  を  $f(\theta) = \theta + \alpha$  で定める。必要に応じて実数としての  $\theta \in \mathbb{R}$  と  $S^1$  上の点としての  $[\theta] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  を混同して書く。

\*<sup>3</sup>  $f : M \rightarrow M$  の閉不変集合  $\Lambda$  がリャプノフ安定であるとは、 $\Lambda$  を含む任意の開集合  $U$  に対し、 $\Lambda \subset V \subset U$  となる開集合  $V$  が存在し、任意の  $x \in V$  に対して  $O_+(x) \subset U$  が成り立つことである。

$\alpha$  が無理数の場合を考える.  $f$  が位相推移的であることを示そう.  $U, V \subset S^1$  を空でない開集合とする.  $\theta_1 \in U, \theta_2 \in V$  をとって固定し, 十分小さい  $\varepsilon > 0$  をとると  $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon) \subset U, (\theta_2 - \varepsilon, \theta_2 + \varepsilon) \subset V$  とできる. ある  $n$  で  $f^n((\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)) \cap (\theta_2 - \varepsilon, \theta_2 + \varepsilon) \neq \emptyset$  が示せれば十分である.  $f^n((\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)) = (\theta_1 + n\alpha - \varepsilon, \theta_1 + n\alpha + \varepsilon)$  であり, この開区間の列は幅  $2\varepsilon$  であるので,  $n = 0, 1, \dots, [1/2\varepsilon] + 1$  まで取ると必ず重なる部分がある.  $l > k$  で  $f^l((\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)) \cap f^k((\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)) \neq \emptyset$  となるとすると,  $f^{l-k}((\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)) \cap (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon) \neq \emptyset$  となる.  $f^{l-k}((\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon))$  と  $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$  は  $\alpha$  が無理数であることからぴったりとは重ならない. よって, これらを合わせた区間  $f^{l-k}((\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)) \cup (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$  は開区間で, 幅は  $2\varepsilon$  より広くなる. その幅を  $2\varepsilon + \delta$  としよう. 次に,

$$f^{2(l-k)}((\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)) \cup f^{l-k}((\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)) \cup (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$$

を考えると, この幅は  $2\varepsilon + 2\delta$  となる. これを繰り返すと, いずれ  $S^1$  全体を覆う. よって,  $f^{m(l-k)}((\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon))$  の形のある開区間は  $(\theta_2 - \varepsilon, \theta_2 + \varepsilon)$  と重なる. 故に, 位相推移的である. なお,  $f^n((\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon))$  と  $(\theta_2 - \varepsilon, \theta_2 + \varepsilon)$  が十分大きな  $n$  でずっと重なるということはないので, 位相混合的ではない.

$f^n(\theta) = \theta$  とすると,  $\alpha$  が有理数となるので, 周期点は存在しない. したがって, ドウヴェイニーの意味でカオスでない.

また,  $\beta_1, \beta_2 \in S^1$  とすると  $|f(\beta_1) - f(\beta_2)| = |\beta_1 - \beta_2|$  であるので, グッケンハイマーの意味での初期値に関する敏感な依存性も持たない.

**例 1.3.**  $f: S^1 \rightarrow S^1$  を  $f(\theta) = 2\theta$  で定める. これは, 非可逆な力学系である.

前例と同じように  $U, V$  をとり, さらに  $\theta_1, \theta_2, \varepsilon$  をとる.

$$f((\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)) = (2\theta_1 - 2\varepsilon, 2\theta_1 + 2\varepsilon)$$

となり, 幅が  $2\varepsilon$  であった開区間は  $f$  で写すと幅が  $4\varepsilon$  になる. さらに写すと  $8\varepsilon$  となり, 繰り返すといずれ  $1$  を超える. すると,  $S^1$  を覆うことになり,  $V$  と重なる.

$\theta$  が  $n$  周期点とすると

$$\theta = 2^n \theta - p$$

となる  $p \in \mathbb{Z}$  が存在する. ここでは,  $\theta$  を実数としてみている. つまり,

$$\theta = \frac{p}{2^n - 1}$$

と表せる  $\theta$  は  $n$  周期点である. このような点は  $\frac{1}{2^n - 1}$  おきにあり, 全ての  $n$  を取ると稠密になる.

したがって, この  $f$  はドウヴェイニーの意味でカオスである. カオスの他の定義も満たす.

**例 1.4.**  $f(x) = 2x^2 - 1$  を考えてみよう.  $x$  の範囲は  $[-1, 1]$  だけで考える. これが, ドウヴェイニーの意味でカオスであることを示そう.

$-1 \leq x \leq 1$  としているので,  $x = \cos \theta$  とおいてみよう. すると,

$$f(x) = f(\cos \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$$

となる. また,

$$f^2(x) = f(\cos 2\theta) = \cos 4\theta$$

同様に

$$f^n(\cos \theta) = \cos 2^n \theta$$

である.

このことは、実は力学系として  $f$  が写像  $g: S^1 \rightarrow S^1, \theta \mapsto 2\theta$  と本質的にほとんど同じであると言える. したがって、前例と重複する部分も多いが、改めて証明しよう. 以下、 $g$  は  $\mathbb{R}$  上の写像として考え、必要に応じて  $f$  との対応を見る際は  $x = \cos \theta$  で同じ  $x$  になる  $\theta$  は同一視することにする.

どんなに小さな空でない開集合を  $\mathbb{R}$  に取っても、ある区間  $(a, b)$  を含む.  $g$  で写すたびに区間の幅は 2 倍になる. 十分大きな  $n$  で  $g^n((a, b))$  の幅は  $2\pi$  以上になる. すると、 $x$  でみると  $[-1, 1]$  全てを覆っており、当然どんな開集合とも交わる. よって、 $f$  は位相推移的である.

次に、周期点について考えよう.  $x = \cos \theta$  が  $f^n(x) = x$  を満たすことは

$$\cos 2^n \theta = \cos \theta$$

が成り立つことと同じである. このためには、ある整数  $m, l$  について

$$2^n \theta = \theta + 2\pi m, 2^n \theta = -\theta + 2\pi l$$

のどちらかが成り立てば良い. ここでは、 $\theta \in \mathbb{R}$  とみなしている. これは、

$$\theta = \frac{2\pi m}{2^n - 1}, \frac{2\pi l}{2^n + 1}$$

と表せる.  $m = 0, \dots, 2^{n-1} - 1, l = 1, \dots, 2^{n-1}$  ととれるから、 $n$  周期の周期点は  $2^n$  個ある. 周期全体は自然数  $n$  と整数  $m$  で

$$\theta = \frac{2\pi m}{2^n - 1}, \frac{2\pi l}{2^n + 1}$$

と表せる点たちからなるから、稠密である.

$g$  でみると、 $\theta$  が次の時間では  $2\theta$  になるので、 $\mathbb{R}$  上の写像  $f(x) = 2x$  と同じくリャプノフ数は  $\log 2$  になる.

実際、 $\varphi(\theta) = \cos \theta (0 < \theta < \pi)$  とし、 $2^n \theta = \pi k$  となるような場合は除外して考えると、

$$D(f^n) = D(\varphi \circ g^n \circ \varphi^{-1}) = D\varphi D(g)^n D\varphi^{-1} = D(g)^n = 2^n$$

となることから、リャプノフ数は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |D(f^n)(x)v| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(2^n |v|) = \log 2$$

である.

2 倍写像  $f(x) = 2x$  は当然カオスではないが、初期値に関する敏感な依存性はどの意味でも持つのであった.  $f(x) = 2x^2 - 1$  はカオスであることが示されたが、 $\theta$  に写すと 2 倍写像だから、このことは不自然に感じるかもしれない.  $\theta$  だと  $2\pi$  の違いは同一視するからそれにより周期点が無限個現れたり、軌道の多様性が現れる. 別の見方をすると、 $f(x) = 2x$  は単に全体を 2 倍に引き延ばしているだけである.  $f(x) = 2x^2 - 1$  は引き延ばしと同時に、折りたたみも起こっている. カオスを引き起こす双曲性という性質は、引

き延ばしと折りたたみを両方もつものことである。ただし、カオスでも双曲性をもつとは限らない。

なお、例 1.4 をより一般化して、

$$f(x) = 2x^2 - c$$

による力学系を考えると、その解明は極めて困難になり、その力学系的性質の研究は進行中である。

もう一つ例を挙げておこう。2次元の以上で起こる例である。上の例は非可逆であったが、次の例は可逆でも起こるカオスである。

**例 1.5.** 離散力学系  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を考える。  $f$  が不動点  $p$  を持つとする。つまり、  $f(p) = p$  である。  $f$  の  $p$  でのヤコビ行列  $Df(p)$  の 2つの固有値は実数で正と負のものを 1つずつ持つとする。このとき、

$$W^s(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f^n(x) \rightarrow p(n \rightarrow \infty)\}$$

$$W^u(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f^n(x) \rightarrow p(n \rightarrow -\infty)\}$$

は滑らかな曲線になることが示される (安定多様体定理)。  $W^s(p), W^u(p)$  を  $p$  の安定多様体, 不安定多様体という。  $W^s(p)$  と  $W^u(p)$  は  $p$  以外の点  $h_0$  で (横断的に) 交叉することがある。この  $h_0$  を通る軌道  $\mathcal{O}(h_0)$  を (横断的) ホモクリニック軌道という。このとき、  $h_n = f^n(h_0) \rightarrow p(n \rightarrow \pm\infty)$  であることが分かるし、軌道上の各点  $h_n$  でも  $W^s(p)$  と  $W^u(p)$  が交叉していることが分かる (図 1.7)。このことから、ホモクリニック軌道の周り

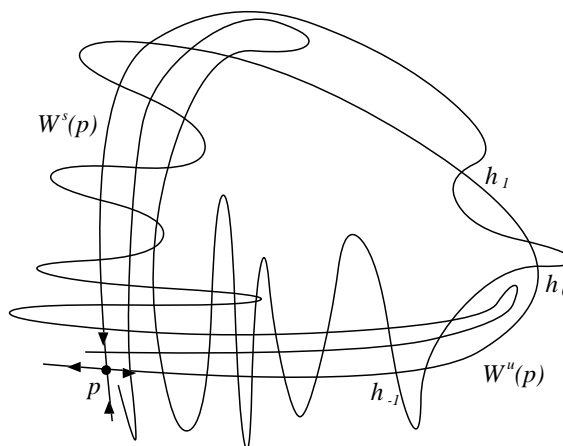


図 1.7 ホモクリニック軌道

では非常に複雑な現象が起こっていることが分かる。これは、どの意味でもカオスである。

ポアンカレは 3 体問題が解けないことを証明した後 3 体問題の力学系を調べるなかでこの現象を発見した。ホモクリニック軌道は 3 体問題以外にも様々な場面で起こる。振り子も周期的な外力を加えると、時間 1 写像において、この現象が起こる。

ホモクリニック軌道の周りの解析については、後ほど詳しく述べる。

## 第 2 章

# 双曲力学系

5/24

### 2.1 位相共役

**定義 2.1.** 2つの力学系  $f: M \rightarrow M, g: N \rightarrow N$  が位相共役であるとは、 $M$  から  $N$  への同相写像  $h$  ( $h$  の逆写像  $h^{-1}$  が存在して、 $h, h^{-1}$  とともに連続ということ) が存在して、

$$h \circ f = g \circ h$$

が成り立つことである。

$f, g$  が位相共役のとき、これらは力学系としての性質は同じであることが分かる。

例えば、 $p$  を  $f$  の周期  $k$  の周期点としよう。つまり、 $f^k(p) = p$  とする。  $f = h^{-1} \circ g \circ h$  だから、

$$(h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \circ \dots \circ (h^{-1} \circ g \circ h)(p) = p$$

が成り立つ。  $(h^{-1} \circ g \circ h)$  の  $k$  個の合成である。これから、 $g^k(h(p)) = h(p)$  が得られる。つまり、 $h(p)$  は  $g$  の周期  $k$  の周期点である。このように、 $f$  の力学系的な概念は  $g$  に対する同じものに  $h$  により写される。

他にも位相推移性のように同相写像により対応させることができる性質は位相共役な力学系同士は満たすことが保証される。よって、力学系  $f$  が与えられたときに、 $f$  と位相共役になり分かりやすい力学系  $g$  を求めることが、力学系の理解のために重要である。

$h$  には、微分同相性は仮定しない。例えば、 $f(x) = 3x$  と  $g(x) = 2x$  を結びつけるような  $h$  は  $h(3x) = 2h(x)$  を満たすものであるから例えば

$$h(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & x \geq 0 \\ -|x|^\alpha & x < 0 \end{cases}$$

( $\alpha = \log_3 2$ ) がある。  $h$  は 0 で微分不可能である。これ以外の  $h$  でも  $f$  と  $g$  を共役にすることはできるが、 $h$  は 0 で微分不可能か、微分可能なら  $h(3x) = 2h(x)$  より  $3h'(0) = 2h'(0)$  なので  $h'(0) = 0$  となる。すると、 $h^{-1}$  は微分不可能になる。力学系理論としては、 $f(x) = 3x$  と  $g(x) = 2x$  のような発散する速度は若干違うにせよ、概ね同じような挙動をする力学系は同等のものと満たしたいので、 $h$  に微分同相性まで仮定するのは仮定が強すぎる。

リャプノフ数のように微分を用いて定義される量は位相共役では保たれない。実際、 $f(x) = 3x$  のリャプノフ数は  $\log 3$ 、と  $g(x) = 2x$  のリャプノフ数は  $\log 2$  である。

相空間がコンパクトであれば、互いに位相共役な力学系の位相的エントロピーは同じである。

## 2.2 双曲型不動点近傍の力学系

滑らかな離散力学系  $f: M \rightarrow M$  を考える。  $M$  は多様体であるとするが、座標を入れて考察するので  $\mathbb{R}^n$  と考えればよい。  $f(p) = p$  を満たす  $p \in M$  を不動点という。

$p$  を不動点とし、  $p$  が原点となるような座標系をとる ( $\mathbb{R}^n$  上の力学系と考えているときは、  $p = 0$  となるように座標変換する) とする。つまり、その座標系において  $p$  を中心とする  $f$  のテイラー展開により、  $p$  に近い  $q$  に対し

$$f(q) = f(p) + Df(p)(q - p) + O(|q - p|^2) = Df(p)q + O(|q - p|^2)$$

と表せる。これは、線形変換

$$q \mapsto Aq \quad (A = Df(p))$$

により近似できることがわかる。そこで、  $f$  は  $p$  に近くでは、  $A$  による線形変換と同じ性質であることが期待される。実際、  $p$  が双曲型という性質を持つときそれは正しい。

不動点  $p$  における  $f$  の微分 (ヤコビ行列)  $Df(p)$  が絶対値 1 の固有値を持たないとき、  $p$  は双曲型不動点であるという。

**定理 2.1** (ハートマン・グロブマン).  $M$  を  $n$  次元多様体とし、  $p \in M$  が  $f: M \rightarrow M$  の双曲型不動点であるとする。このとき、  $p$  の近傍  $U \subset M$  と  $\mathbb{R}^n$  の原点の近傍  $V$  と同相写像  $h: U \rightarrow V$  が存在して、  $h \circ f = Df(p) \circ h$  が成り立つ。

$p$  が双曲型でない不動点の場合は、一般には上の定理は成立しない。

$p$  が  $f: M \rightarrow M$  の双曲型不動点であるとしよう。  $A = Df(p)$  の固有値は、絶対値が 1 より大きいものと小さいものになる。絶対値が 1 より大きい固有値に対応する一般化固有空間の直和を  $E^u$ 、絶対値が 1 より小さい固有値に対応する一般化固有空間の直和を  $E^s$  とする。  $E^u \oplus E^s = \mathbb{R}^n$  である。  $E^u, E^s$  はそれぞれ  $A^k q \rightarrow 0 (k \rightarrow -\infty), A^k q \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$  となる  $q$  の集合で定義される。  $f$  と  $A$  は  $q$  の近傍で位相共役であるから、  $E^u, E^s$  に対応する集合は  $M$  上に取れる。  $E^u, E^s$  は部分空間であるが、  $M$  上の集合の性質はハートマン・グロブマンよりそれを連続写像で移されたものである。それらは、滑らかな多様体であることを示すのが次の定理である。

**定理 2.2** (安定多様体定理).  $M$  を多様体とし離散力学系  $f: M \rightarrow M$  を考える。  $p \in M$  を  $f$  の双曲型不動点であるとする。

$$W^s(p) = \{x \in M \mid f^n(x) \rightarrow p (n \rightarrow \infty)\}$$

$$W^u(p) = \{x \in M \mid f^n(x) \rightarrow p (n \rightarrow -\infty)\}$$

とおく。このとき、  $W^s(p), W^u(p)$  は  $M$  の滑らかな部分多様体<sup>\*1</sup>である。

<sup>\*1</sup> 正確にいうと、はめ込まれた部分多様体である。



$W^s(p), W^u(p)$  をそれぞれ  $p$  の安定多様体, 不安定多様体という.  $Df(p)$  の絶対値が 1 より小さい固有値に対応する固有空間の直和を  $E^s$ , 絶対値が 1 より大きい固有値に対応する固有空間の直和を  $E^u$  とする.  $W^s(p), W^u(p)$  は  $p$  でそれぞれ  $E^s, E^u$  に接する.

連続力学系の場合について簡単に触れておく. 常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = v(x)$$

について,  $v(x_0) = 0$  のとき  $x_0$  を平衡点というのであった.  $x_0$  における  $v(x)$  のヤコビ行列  $Dv(x_0)$  の固有値に純虚数のものがないとき,  $x_0$  を双曲型平衡点という. 離散力学系の場合と同様に, 双曲型平衡点  $x_0$  の近傍の流れは, 線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = A(x - x_0)$$

の流れと位相共役<sup>\*2</sup>である. ただし,  $A = Dv(x_0)$  である. また, 安定多様体, 不安定多様体も

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \{x \in M \mid \varphi^t(x) \rightarrow p(t \rightarrow \infty)\} \\ W^u(p) &= \{x \in M \mid \varphi^t(x) \rightarrow p(t \rightarrow -\infty)\} \end{aligned}$$

と定義され, 滑らかな (はめ込まれた部分) 多様体になる.

5/31

## 2.3 ホモクリニック点

力学系  $f : M \rightarrow M$  が双曲型不動点  $p$  をもち, その安定多様体  $W^s(p)$  と不安定多様体  $W^u(p)$  を考える.  $W^s(p)$  と  $W^u(p)$  は  $p$  以外の点でも共有点を持つことがある. そのような点  $q$  をホモクリニック点という. つまり, ホモクリニック点とは  $q \in W^s(p) \cap W^u(p) \setminus \{p\}$  となる点  $q$  である. また, 言い換えると  $f^n(q) \rightarrow p(n \rightarrow \pm\infty), q \neq p$  を満たす点である.

以上のことから,  $q$  がホモクリニック点であれば,  $f(q)$  や  $f^{-1}(q)$  もホモクリニック点である. さらに,  $n \in \mathbb{Z}$  について  $f^n(q)$  もホモクリニック点である. よって, ホモクリニック点は 1 点存在すれば無限個存在する.

ホモクリニック点  $q$  における  $W^s(p)$  と  $W^u(p)$  の接空間  $T_q W^s(p), T_q W^u(p)$  が  $q$  における  $M$  全体の接空間  $T_q M$  を張るとき, つまり

$$T_q M = T_q W^s(p) \oplus T_q W^u(p)$$

となるとき,  $q$  を横断的ホモクリニック点という. また, その点の軌道をホモクリニック軌道という. この模式図は, 図 1.7 の通りである.

連続力学系の場合も  $p$  が双曲型平衡点で,  $q \in W^s(p) \cap W^u(p) \setminus \{p\}$  となるとき  $q$  をホモクリニック点という.  $q$  はホモクリニック点のとき,  $q$  の軌道  $O(q)$  は  $W^s(p) \cap W^u(p)$  に含まれる.  $O(q)$  は 1 次元あるので,  $W^s(p)$  と  $W^u(p)$  の共通部分は少なくとも 1 次元はあり,

$$T_q M = T_q W^s(p) \oplus T_q W^u(p)$$

<sup>\*2</sup> 流れに関する位相共役の定義は, 離散力学系の場合と同様であるので省く.

にはなり得ない。よって、連続力学系では双曲的平衡点の横断性というのは考えられない。連続力学系で周期解が存在するとき、ポアンカレ写像をとって離散力学系としてその周期解が双曲型不動点に対応し、そのホモクリニック点の横断性を議論することが多い。

または、ポアンカレ写像で考えたことと本質的に同じことではあるが、周期解自体の安定多様体、不安定多様体を考えることができ、それらは周期解の分次元が高いので横断的に交わることがありうる。

**例 2.1.**  $a, b$  を定数とする。

$$F_{ab}(x, y) = (-x^2 - y + a, bx)$$

で定まる微分同相写像  $F_{ab} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を *Hénon* 写像という。  $F_{ab}$  の不動点は

$$-x^2 - y + a = x, \quad bx = y$$

を満たす点だから、  $(b+1)^2 + 4a \geq 0$  のとき存在し、

$$(x_{\pm}, y_{\pm}) = \left( \frac{-(b+1) \pm \sqrt{(b+1)^2 + 4a}}{2}, \frac{-b(b+1) \pm b\sqrt{(b+1)^2 + 4a}}{2} \right)$$

である。ヤコビ行列は

$$DF_{ab} = \begin{pmatrix} -2x_{\pm} & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

である。この固有多項式は

$$\alpha(\lambda) = \lambda^2 + 2x_{\pm}\lambda + b$$

である。  $(x_{\pm}, y_{\pm})$  が双曲型で  $\dim W^s((x_{\pm}, y_{\pm})) = \dim W^u((x_{\pm}, y_{\pm})) = 1$  となる条件は、  $\alpha(\lambda)$  の根が絶対値が 1 より大きいものと小さいものを 1 つずつ持つようになる条件は

$$\alpha(1)\alpha(-1) < 0$$

である。これを計算すると、

$$\begin{aligned} (1+b+2x_{\pm})(1+b-2x_{\pm}) &< 0 \\ (1+b)^2 &< 4x_{\pm}^2 = -4(b+1)x_{\pm} + 4a \\ \pm 2(b+1) &< \sqrt{(b+1)^2 + 4a} \end{aligned}$$

となるので、不動点の一方はその条件を満たす。左辺が正になる方については、 $\otimes$  乗して、

$$\begin{aligned} 4(b+1)^2 &< (b+1)^2 + 4a \\ 3(b+1)^2 &< 4a \end{aligned}$$

であればよいので、このとき両方の不動点が双曲型で、それらの安定多様体と不安定多様体は 1 次元になる。

数値計算等により  $b$  に対し  $a$  が十分大きければ、その安定多様体と不安定多様体は横断的に交差することが確かめられている。

**例 2.2.** 支点を周期的に振動させたときの振り子 (図 2.1) の運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(\rho^2 + \varepsilon \cos vt) \sin \theta$$

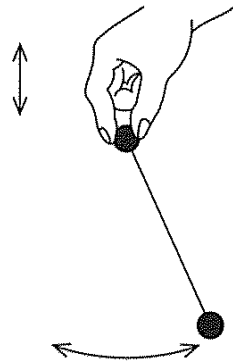


図 2.1 周期外力付き振り子

により表される. 1 階の微分方程式にするために

$$\frac{d\theta}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -(\rho^2 + \varepsilon \cos \nu t) \sin \theta \tag{2.1}$$

と表す.  $\theta$  と  $\theta + 2\pi$  は物理的に同じ点を表すから,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  の範囲で考える.

$\varepsilon = 0$  の場合は支点を固定した振り子になる (図 2.2). この場合,  $E = \frac{1}{2}v^2 - \rho^2 \cos \theta$  とすると,

$$\frac{dE}{dt} = v\dot{v} + \rho^2\dot{\theta} \sin \theta = v(-\rho^2 \sin \theta) + \rho^2 v \sin \theta = 0$$

であるから,  $E$  は一定である. よって, このとき  $(\theta, v)$  の軌道は  $E$  の等高線になる (図 2.3).

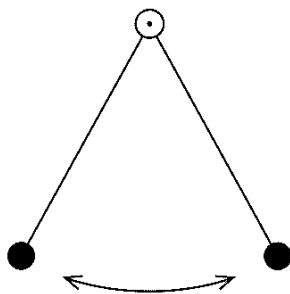


図 2.2 振り子

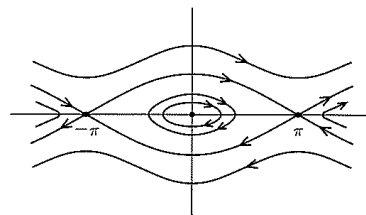


図 2.3 振り子の相図

自励的な系にするために変数を増やし,

$$\frac{d\theta}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -(\rho^2 + \varepsilon \cos \nu s) \sin \theta, \quad \frac{ds}{dt} = 1$$

とし,  $s \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$  と考える. ポアンカレ断面  $\{(\theta, v, s) \mid s = 0\}$  でポアンカレ写像をとる.

$(\theta, v) = (0, 0), (\pm\pi, 0)$  は (自励化していない) 微分方程式の平衡点であるが, これがポアンカレ写像の不動点に対応する. その不動点に関するポアンカレ写像の線形部分を調べるために, 元の微分方程式に戻って解析する. 平衡点近傍で線形化すると,

$$\frac{d\delta\theta}{dt} = \delta v, \quad \frac{d\delta v}{dt} = -(\rho^2 + \varepsilon \cos \nu t) \cos \theta \delta\theta = \pm(\rho^2 + \varepsilon \cos \nu t) \delta\theta$$

となる.  $\pm$  は  $(\theta, v) = (0, 0)$  のとき  $-$  で,  $(\theta, v) = (\pm\pi, 0)$  のとき  $+$  である.  $\varepsilon = 0$  の場合,

$$\frac{d\delta\theta}{dt} = \delta v, \quad \frac{d\delta v}{dt} = \pm\rho^2\delta\theta$$

であるから, 線形化方程式の解は  $\pm$  が  $+$  のとき

$$\delta\theta = c_1 e^{\rho t} + c_2 e^{-\rho t}, \quad \delta v = c_1 \rho e^{\rho t} - c_2 \rho e^{-\rho t}$$

で,  $\pm$  が  $-$  のとき

$$\delta\theta = c_1 \cos \rho t + c_2 \sin \rho t, \quad \delta v = -c_1 \rho \sin \rho t + c_2 \rho \cos \rho t$$

である.

さて, (2.1) は, 周期  $T = \frac{2\pi}{\nu}$  の微分方程式になっているから, ポアンカレ写像は初期値  $(\theta(0), v(0))$  に対し, その解の時間  $T$  後の点  $(\theta(T), v(T))$  を対応させることで決まる.  $\varepsilon = 0$  の場合, ポアンカレ写像の平衡点近傍の線形項は

$$\begin{pmatrix} \delta\theta(0) \\ \delta v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 \rho - c_2 \rho \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \delta\theta(T) \\ \delta v(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}} + c_2 e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}} \\ c_1 \rho e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}} - c_2 \rho e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}} \end{pmatrix}$$

である. これは,

$$\begin{pmatrix} \delta\theta(0) \\ \delta v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \delta\theta(T) \\ \delta v(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}} & e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}} \\ \rho e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}} & -\rho e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

と表せるから,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta\theta(T) \\ \delta v(T) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}} & e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}} \\ \rho e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}} & -\rho e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho & -\rho \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta\theta(0) \\ \delta v(0) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2\rho} \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}} & e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}} \\ \rho e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}} & -\rho e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\rho & -1 \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\theta(0) \\ \delta v(0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\rho} \begin{pmatrix} \rho e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}} + \rho e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}} & e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}} - e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}} \\ \rho^2 e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}} - \rho^2 e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}} & \rho e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}} + \rho e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\theta(0) \\ \delta v(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \frac{2\pi\rho}{\nu} & \rho^{-1} \sinh \frac{2\pi\rho}{\nu} \\ \rho \sinh \frac{2\pi\rho}{\nu} & \cosh \frac{2\pi\rho}{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\theta(0) \\ \delta v(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. この固有値は

$$\cosh \frac{2\pi\rho}{\nu} \pm \sinh \frac{2\pi\rho}{\nu} = e^{\frac{2\pi\rho}{\nu}}, e^{-\frac{2\pi\rho}{\nu}}$$

であるから, 双曲的である. 摂動に対して, 固有値は連続的に変化するので,  $\varepsilon > 0$  が十分小さければ双曲的である.  $\varepsilon = 0$  では  $(-\pi, 0)$  の安定多様体と  $(\pi, 0)$  の不安定多様体は (その不動点自身を省いた集合が) 一致する. 厳密な証明には後で述べるメルニコフ理論が必要になるが,  $\varepsilon > 0$  では安定多様体と不安定多様体は変化し, 横断的に交わる. よって, 横断的ヘテロクリニック点が存在する.

なお, この力学系の  $\theta$  は  $S^1$  上の点と見做すこともできる. すると,  $(-\pi, 0)$  と  $(\pi, 0)$  は同じ点である. 相空間を  $S^1 \times \mathbb{R}$  と考えた場合は, 横断的ホモクリニック点が存在すると言える.

## 2.4 記号力学系と馬蹄力学系

■記号力学系  $0, 1$  からなる両側無限列全体の集合を  $\Sigma$  とおく:

$$\Sigma = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \mid a_n = 0 \text{ または } 1\}.$$

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  に対し,

$$d(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|a_n - b_n|}{2^{|n|}}$$

とおくと,  $d$  は  $\Sigma$  上の距離になる.

$\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$  を

$$\sigma(\{a_n\}) = \{a'_n\}, \quad a'_n = a_{n+1}$$

で定める. つまり, 番号を1つずらしただけである.  $\sigma$  をシフトという.

この  $\sigma$  はかなり分かりやすい力学系だと思われるが, 実は次のようにカオス的な性質をもつ.

**定理 2.3.** 1.  $\sigma$  は位相推移的である. さらに, 位相混合的である.

2.  $\sigma$  は初期値に関する敏感な依存性をもつ.

3.  $h(\sigma) = \log 2$ .

**問題 4.** この定理の 1, 2 を証明せよ. できたら, 3 も.

$\Sigma$  の位相的な性質について述べておく.  $\{a_n\} \in \Sigma$  に対し,

$$b_{2k-1} = \begin{cases} 0 & (a_k = 0) \\ 2 & (a_k = 1) \end{cases}, \quad b_{2k} = \begin{cases} 0 & (a_{-k} = 0) \\ 2 & (a_{-k} = 1) \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

により  $b_k (k = 1, 2, 3, \dots)$  を定め, 3進法で展開した小数  $x = 0.b_1 b_2 b_3 \dots$  をとる. この  $\{a_n\}$  から  $x$  への写像は  $\Sigma$  から 3進カントール集合への同相写像になる. つまり,  $\Sigma$  は 3進カントール集合と同相である.

■馬蹄力学系 次の例として, 力学系  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が, 図 2.4 のように正方形  $ABCD$  を  $A'B'C'D'$  に写すようなものとする. この正方形領域を  $R$  とおく.  $f$  により  $R$  は縦に伸びられ, 横に縮められ, 折り曲げられる.  $R$  と  $f(R)$  の重なるところでの伸び率は  $\mu > 1$ , 縮み率は  $0 < \lambda < 1$  であるとする.

$f$  の合成により  $R$  からはみ出る部分は考えないことにするので,

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R)$$

に制限して考える.  $n$  が負のところは,  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  の  $-n$  回合成である.

$R$  と  $f(R)$  の重なる部分は, 図のように  $R_0$  と  $R_1$  に分かれる.  $x \in \Lambda$  を任意のとり.  $x \in R_0$  または  $x \in R_1$  である.  $f^n(x)$  に対しても,  $f^n(x) \in R_0$  または  $f^n(x) \in R_1$  である. これにより, 記号力学系に対応させる.

$$a_n(x) = \begin{cases} 0 & (f^n(x) \in R_0) \\ 1 & (f^n(x) \in R_1) \end{cases} \quad (2.2)$$

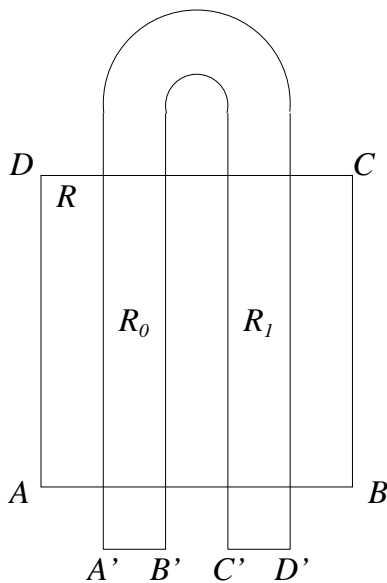


図 2.4 馬蹄写像

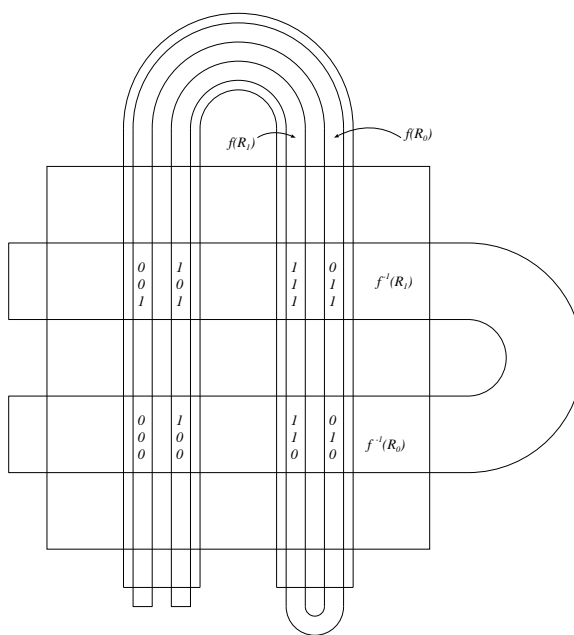


図 2.5 記号との対応:  $a_{-1}a_0a_1$

とおく. これで, 写像

$$\varphi : \Lambda \rightarrow \Sigma, x \mapsto \{a_n(x)\}$$

が定まる. これにより, 記号力学系  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  と, 馬蹄力学系  $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$  は位相共役である. 力学系的な性質は, 位相共役で保たれるから,  $\sigma$  が持つカオス的な性質は,  $f$  も持つ.

確認する必要があるのは,  $\varphi$  が同相写像であることである. まず, 全射であることは, 記号列を与えればそれにより左右上下どの層にあるか考えれば良いので, 対応する  $\Lambda$  の元が存在することが分かる. 単射性は, 写像  $f$  により縦に伸びるので異なる点は縦に離れ

ていき、過去に遡れば横に離れるのでいずれ  $R_0$  と  $R_1$  別々に属することから分かる。 $\Lambda$  において十分近い点は、 $f$  で何回か写しても  $R_0$  と  $R_1$  の同じ側に属するので、記号列として長い部分一致する。よって連続である。 $\Lambda$  は有界な閉集合だからコンパクト、 $\Sigma$  はハウスドルフ空間である。よって、 $\varphi$  は同相写像である。<sup>\*3</sup>

次に、 $\sigma \circ \varphi = \varphi \circ f|_{\Lambda}$  を示す。 $\sigma \circ \varphi(x)$  は (2.2) により定まる数列  $\{a_n(x)\}$  の番号を1つずらしたものになる。一方、 $\varphi \circ f|_{\Lambda}(x)$  は  $f(x)$  に対して (2.2) により数列  $\{a_n(f(x))\}$  を対応させたもので、 $x$  に対する数列と番号が1つずれる。従って、両者は一致する。これにより、 $\varphi$  により  $\sigma$  と  $f|_{\Lambda}$  は位相共役になる。

また、これにより  $\Lambda$  も3進カントール集合と同相であることも分かった。なお、一般的なカントール集合の定義として、距離空間  $X$  において、 $S \subset X$  が完全不連結かつ完全かつコンパクトで空でないとき、 $S$  をカントール集合という。完全不連結とは、連結成分はすべて1点からなることをいう。 $S$  が完全とは閉集合であって、 $S$  の任意の点が  $S$  の集積点、つまりそれ自身でない  $S$  の点列の極限点になることをいう。この一般的な定義のもとでは、様々なカントール集合が考えられるが、実は互いに同相であることが示せる。特に、すべてのカントール集合は3進カントール集合と同相である。従って、 $\Lambda$  や  $\Sigma$  に関しても、この位相的な性質を調べることから、カントール集合であることを示すこともできる。

**■横断的ホモクリニック点への応用** 前節で述べたような横断的ホモクリニック点をもつ力学系  $f: M \rightarrow M$  を考える。まず  $f$  の不動点  $p$  があり、 $Df(p)$  が絶対値1の固有値を持たないという仮定があった。このとき、 $p$  を双曲型不動点という。双曲型不動点  $p$  から安定多様体  $W^s(p)$  に沿ってホモクリニック点  $q$  までの部分に少し厚みをつけた領域  $R$  を考える。 $R$  は十分大きな  $K > 0$  をとると、 $f^K$  より馬蹄形に写る (図 2.6)。つまり、その上では本質的には馬蹄力学系となるような不変集合を持っている。そのことから、 $f$  がカオス的な性質を持つことがわかる。また、 $f$  の一部は記号力学系として理解可能である。このようにして、次が示されている。

**定理 2.4** (ポアンカレ-バーコフ-スモール). 力学系  $f: M \rightarrow M$  が双曲型不動点  $p$  とその横断的ホモクリニック点  $q$  を持つならば、ある自然数  $K > 0$  と  $p, q$  を含む  $f^K$  の不変集合  $\Lambda$  が存在して、

$$g = f^K|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda$$

はシフト  $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$  に位相共役である。

特に、 $f$  の位相的エントロピーは

$$h(f) \geq \frac{1}{K} \log 2 > 0$$

と評価できる。

<sup>\*3</sup> 一般に、コンパクト空間からハウスドルフ空間への全単射連続写像は同相写像である。

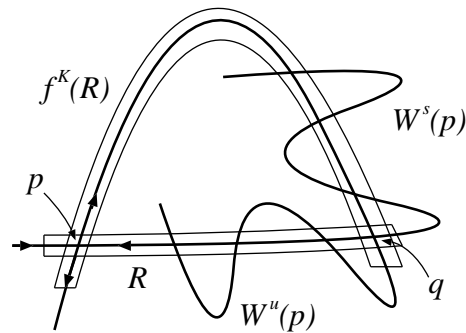


図 2.6

## 2.5 メルニコフ理論

一般には、安定多様体や不安定多様体の大域的な形を知ることは難しいので、ホモクリニック点の存在やその横断性を証明することは一般には困難である。1つの方法はパラメータを持つ力学系で安定多様体と不安定多様体がぴったり一致しその形がよく分かるようなときに、そのパラメータを少し動かしたときに安定多様体や不安定多様体の変動を調べて横断性を調べることである。以下で、ホモクリニック点の横断性を示すメルニコフの方法と呼ばれる手法を紹介する。

メルニコフの方法は様々なバージョンがあるが、ここでは周期的ハミルトン力学系と呼ばれる連続系でポアンカレ写像をとるとホモクリニック点の横断性が見られるような手法を紹介する。

後ほど応用例として

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = q - q^3 + \varepsilon\gamma \cos(\omega t) - \varepsilon\delta p$$

に適用する。この例についてももう少し詳しく述べておく。この場合は、自励系

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q - q^3 + \varepsilon\gamma \cos(\omega t) - \varepsilon\delta p \\ \omega \end{pmatrix}$$

にして、 $\tau$  と  $\tau + 2\pi$  を同一視し、ポアンカレ断面を  $\tau = 0$  で定めたポアンカレ写像において横断的ホモクリニック軌道が存在することを示すことになる。

ここで、

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{4}q^4$$



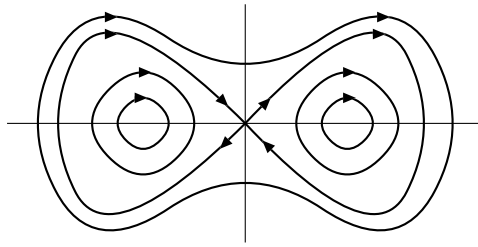


図 2.7

とおくと,  $\varepsilon = 0$  の場合の方程式は

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p), \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \quad (2.3)$$

と表せる. このような形の微分方程式をハミルトン力学系といい,  $H$  をハミルトニアンという. ハミルトニアン  $H$  のベクトル場を

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}$$

と書くこともある.  $H$  は一定であるから, 流れは図 2.7 のようになる. 原点が双曲型平衡点となり, ホモクリニック軌道が存在することがわかる. ポアンカレ写像としても同じく, ホモクリニック点が存在し,  $W^s(\mathbf{0}), W^u(\mathbf{0})$  も同じ集合である.  $\varepsilon = 0$  では横断的ではない.  $\varepsilon \neq 0$  としたとき,  $W^s(\mathbf{0})$  と  $W^u(\mathbf{0})$  の変化をみて, 横断的になることを示すことになる.

$$Y(q, p, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \cos \tau - \delta p \end{pmatrix}$$

とおくと方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_H \\ \omega \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} Y(q, p, \tau) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

と表せる.

以下では,  $H$  や  $Y$  は上記の具体的な例に限らず, (2.3) がホモクリニック軌道をもつときの (2.4) の形の微分方程式についてメルニコフの方法を紹介する.

$(q_0, p_0)$  を (2.3) の双曲型平衡点,  $\alpha$  をその 1 つのホモクリニック軌道とし,

$$\Gamma = \{(q, p, \tau) \mid (q, p) \in \alpha, \tau \in \mathbb{R}\}$$

とおく.  $\Gamma$  は  $W^s((0, 0)) \times \mathbb{R}$  や  $W^u((0, 0)) \times \mathbb{R}$  (から  $(0, 0) \times \mathbb{R}$  を抜いた集合) である.  $\varepsilon > 0$  とするとこれらが変化してずれ始める.  $W^s(\gamma_0) = W^s((0, 0)) \times \mathbb{R}$  や  $W^u(\gamma_0) = W^u((0, 0)) \times \mathbb{R}$  とおき,  $\varepsilon$  の場合も  $W^s(\gamma_0), W^u(\gamma_0)$  とかく\*<sup>4</sup>.

\*<sup>4</sup> この辺りは少々ごまかしている点があって, 厳密には次のようになる.  $\gamma_0(t) = (q_0, p_0, \omega t)$  が解になり,  $t$  と  $t + 2\pi$  を同一視すると周期解とみなせる. この周期解は (周期解としての) 双曲型をもち, その場合, 摂動しても生き残る. その生き残った周期解を  $\gamma_\varepsilon$  とする.  $\gamma_0$  の (平衡点でなく周期解の) 安定多様体  $W^s(\gamma_0)$ , 不安定多様体  $W^u(\gamma_0)$  が  $\Gamma$  でびったり重なり, 摂動により安定多様体  $W^s(\gamma_\varepsilon)$ , 不安定多様体  $W^u(\gamma_\varepsilon)$  は一般には重ならなくなる.

$z_0 \in \Gamma$  に対し,  $z^s(z_0, \varepsilon)$  を  $z_0$  を通る  $\Gamma$  の垂線が  $W^s(\gamma_\varepsilon)$  と交わる点とする.  $z^u(z_0, \varepsilon)$  も同様.  $\hat{G}(z_0, \varepsilon) = H(z^u(z_0, \varepsilon)) - H(z^s(z_0, \varepsilon))$  とおく. なぜ  $H$  が出てくるかという  
と,  $H$  の勾配ベクトルが  $\Gamma$  と垂直になるため,  $W^s(\gamma_\varepsilon)$  と  $W^u(\gamma_\varepsilon)$  のズレを計るのにちよ  
うど良いからである.  $\hat{G}(z_0, 0) = 0$  なので

$$\hat{G}(z_0, \varepsilon) = \varepsilon G(z_0, \varepsilon)$$

とおく.  $G(z_0, 0)$  をメルニコフ関数といい  $M(z_0)$  と表す. これは,

$$M(z_0) = G(z_0, 0) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \hat{G}(z_0, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} H(z^u(z_0, \varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} - \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} H(z^s(z_0, \varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0}$$

とも表せる.

$$\hat{G}(z_0, \varepsilon) = \varepsilon M(z_0) + O(\varepsilon^2)$$

であるから,  $M(z_0)$  は各  $z_0 \in \Gamma$  における  $W^s(\gamma_\varepsilon)$  と  $W^u(\gamma_\varepsilon)$  の差を評価しているとみな  
せる. このことから, 次が成り立つ.

**定理 2.5.** ある  $z_0 \in \Gamma$  で  $M(z_0) = 0, DM(z_0) \neq 0$  が成り立つとする. このとき, 十分  
小さい  $\varepsilon \neq 0$  に対して,  $\gamma_\varepsilon$  は  $z_0$  の近くで横断的なホモクリニック点をもつ.

メルニコフ関数の計算は以下の公式より可能である.

**定理 2.6.** メルニコフ関数は

$$M(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} DH_{\varphi_0(t, z_0)} Y(\varphi_0(t, z_0)) dt$$

で与えられる. ここで,  $\varphi(t, z_0)$  は  $\varepsilon = 0$  のときの (2.3) の流れである.

**証明.** 以下, 簡潔に書くため,  $\varepsilon$  による微分は  $\varepsilon = 0$  での値を取るものとする.  $\varphi(t, z, \varepsilon)$   
は  $z$  を初期値とする (2.4) の解である.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} H \circ \varphi(t, z^u(z_0, \varepsilon), \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{d}{dt} H \circ \varphi(t, z^u(z_0, \varepsilon), \varepsilon) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} DH \cdot (X_H + \varepsilon Y) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} DH \cdot X_H + DH \cdot Y \\ &= (DH \cdot Y)_{\varphi_0(t, z_0)} \end{aligned}$$

となる. なぜなら,  $DH = \left( \frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right)$  であり, 恒等的に  $DH \cdot X_H = 0$  であるからで  
ある.

これを,  $T_1$  から  $T_2$  まで積分すると

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} H \circ \varphi(T_2, z^u(z_0, \varepsilon), \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} H \circ \varphi(T_1, z^u(z_0, \varepsilon), \varepsilon) = \int_{T_1}^{T_2} (DH \cdot Y)_{\varphi_0(t, z_0)} dt$$

が得られる. ここで,  $T_2 = 0, T_1 \rightarrow -\infty$  とすると,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} H \circ \varphi(0, z^u(z_0, \varepsilon), \varepsilon) - \lim_{T_1 \rightarrow -\infty} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} H \circ \varphi(T_1, z^u(z_0, \varepsilon), \varepsilon) = \int_{-\infty}^0 (DH \cdot Y)_{\varphi_0(t, z_0)} dt$$

となる.

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} H \circ \varphi(T_1, z^u(z_0, \varepsilon), \varepsilon) = DH(\varphi(T_1, z^u(z_0, \varepsilon), \varepsilon)) \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}(T_1, z^u(z_0, \varepsilon), \varepsilon)$$

であり,  $T_1 \rightarrow -\infty$  のとき  $\varphi$  は平衡点に漸近するので  $DH \rightarrow 0$  となる. また,  $\varphi(0, \mathbf{z}^u(\mathbf{z}_0, \varepsilon), \varepsilon) = \mathbf{z}^u(\mathbf{z}_0, \varepsilon)$  であるから,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} H(\mathbf{z}^u(\mathbf{z}_0, \varepsilon)) = \int_{-\infty}^0 (DH \cdot Y)_{\varphi_0(t, \mathbf{z}_0)} dt$$

が得られた. 同様にして,

$$-\frac{\partial}{\partial \varepsilon} H(\mathbf{z}^s(\mathbf{z}_0, \varepsilon)) = \int_0^{\infty} (DH \cdot Y)_{\varphi_0(t, \mathbf{z}_0)} dt$$

が得られ, 故に

$$M(\mathbf{z}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} DH_{\varphi_0(t, \mathbf{z}_0)} Y(\varphi_0(t, \mathbf{z}_0)) dt$$

となる. □

**例 2.3.**

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q - q^3 + \varepsilon \gamma \cos(\omega t) - \varepsilon \delta p \\ p \\ \omega \end{pmatrix}$$

を考えよう.

$\varepsilon = 0$  のとき

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q - q^3 \\ \omega \end{pmatrix}$$

となり, 天下りのではあるが, ホモクリニック軌道は

$$\begin{pmatrix} q_0^\pm(t) \\ p_0^\pm(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{2} \operatorname{sech} t \\ \mp \sqrt{2} \operatorname{sech} t \tanh t \end{pmatrix}$$

と表せる. ここで,

$$\operatorname{sech} t = \frac{1}{\cosh t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}, \quad \tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

である. ここから, 符号は上の方を使う.  $(q_0(t), p_0(t)) = (\sqrt{2} \operatorname{sech}(t), -\sqrt{2} \operatorname{sech}(t) \tanh(t))$  とおく.

$q, p, \tau$  に関する解は  $(q(t), p(t), \tau(t)) = (q_0(t - t_0), p_0(t - t_0), \tau_0 + \omega t)$  である.  $\Gamma$  上の点  $\mathbf{z}_0$  は  $t_0, \tau_0$  により

$$\mathbf{z}_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \operatorname{sech}(-t_0) \\ -\sqrt{2} \operatorname{sech}(-t_0) \tanh(-t_0) \\ \tau_0 \end{pmatrix}$$

とパラメトライズできるので, メルニコフ関数は  $t_0, \tau_0$  の関数と考える.

$$\begin{aligned}
M(t_0, \tau_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} DH_{\varphi_0(t, z_0)} Y(\varphi_0(t, z_0)) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-q_0(t-t_0) + q_0^3(t-t_0), p_0(t-t_0)) \cdot (0, \gamma \cos(\tau_0 + \omega t) - \delta p_0(t-t_0)) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p_0(t-t_0) (\gamma \cos(\tau_0 + \omega t) - \delta p_0(t-t_0)) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -\delta (p_0(t-t_0))^2 + \gamma p_0(t-t_0) \cos(\tau_0 + \omega t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -\delta (p_0(s))^2 + \gamma p_0(s) \cos(\tau_0 + \omega t_0 + \omega s) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -\delta (p_0(s))^2 + \gamma p_0(s) \cos(\tau_0 + \omega t_0) \cos \omega s - \gamma p_0(s) \sin(\tau_0 + \omega t_0) \sin \omega s ds
\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (p_0(s))^2 ds &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 s \tanh^2 s ds = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh^2 s}{\cosh^4 s} ds = 8 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^s - e^{-s})^2}{(e^s + e^{-s})^4} ds \\
&= 8 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2s} + e^{-2s} - 2}{(e^{2s} + e^{-2s} + 2)^2} ds = 8 \int_{-\infty}^{\infty} e^{2s} \frac{e^{4s} + 1 - 2e^{2s}}{(e^{4s} + 1 + 2e^{2s})^2} ds \\
&= 8 \int_0^{\infty} u \frac{u^2 + 1 - 2u}{(u^2 + 1 + 2u)^2} \frac{ds}{du} du = 4 \int_0^{\infty} \frac{u^2 + 1 - 2u}{(u+1)^4} du \\
&= 4 \int_0^{\infty} \frac{4}{(u+1)^4} - \frac{4}{(u+1)^3} + \frac{1}{(u+1)^2} du = 4 \left[ -\frac{4}{3(u+1)^3} + \frac{2}{(u+1)^2} - \frac{1}{u+1} \right]_0^{\infty} \\
&= 4 \left( \frac{4}{3} - 2 + 1 \right) = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

である. また,  $p(s) \cos \omega s$  は奇関数であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(s) \cos \omega s ds = 0$$

である. また,  $\frac{d \operatorname{sech} s}{ds} = -\operatorname{sech} s \tanh s$  であるから, 部分積分を用いて

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} p(s) \sin \omega s ds &= -\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} s \tanh s \sin \omega s ds \\
&= [\sqrt{2} \operatorname{sech} s \sin \omega s]_0^{\infty} - \sqrt{2} \omega \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} s \cos \omega s ds \\
&= -\sqrt{2} \omega \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} s \cos \omega s ds = -\sqrt{2} \omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega s} + e^{-i\omega s}}{e^s + e^{-s}} ds
\end{aligned}$$

となる. ここで, 複素関数  $\frac{e^{i\omega z}}{e^z + e^{-z}}$  の  $-R, R, R + \pi i, -R + \pi i$  を頂点とする長方形に沿っ

た積分は

$$\begin{aligned}
\oint \frac{e^{i\omega z}}{e^z + e^{-z}} dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{i\omega s}}{e^s + e^{-s}} ds - \int_{-R}^R \frac{e^{i\omega(s+i\pi)}}{e^{s+\pi i} + e^{-s-\pi i}} ds \\
&\quad + \int_0^\pi \frac{e^{i\omega(R+iu)}}{e^{R+iu} + e^{-(R+iu)}} i du - \int_0^\pi \frac{e^{i\omega(-R+iu)}}{e^{-R+iu} + e^{-(-R+iu)}} i du \\
&= \int_{-R}^R \frac{e^{i\omega s}}{e^s + e^{-s}} ds + e^{-\pi\omega} \int_{-R}^R \frac{e^{i\omega s}}{e^s + e^{-s}} ds \\
&\quad + \int_0^\pi \frac{e^{i\omega R - \omega u}}{e^{R+iu} + e^{-R-iu}} i du - \int_0^\pi \frac{e^{-i\omega R - \omega u}}{e^{-R+iu} + e^{R-iu}} i du \\
&\rightarrow (1 + e^{-\pi\omega}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega s}}{e^s + e^{-s}} ds \quad (R \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

となる。一方、この長方形内の極は  $z = \frac{\pi i}{2}$  であり、

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\omega(z + \frac{i\pi}{2})}}{e^{z + \frac{i\pi}{2}} + e^{-z - \frac{i\pi}{2}}} &= \frac{e^{i\omega z - \frac{\pi\omega}{2}}}{ie^z - ie^{-z}} = \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2}}}{i} \frac{e^{i\omega z}}{e^z - e^{-z}} \\
&= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2}}}{i} \frac{1 + i\omega z - \frac{\omega^2 z^2}{2} + \dots}{(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} \dots) - (1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \dots)} \\
&= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2}}}{2iz} \frac{1 + i\omega z - \frac{\omega^2 z^2}{2} + \dots}{1 + \frac{z^2}{6} + \dots}
\end{aligned}$$

だから、留数は  $\frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2}}}{2i}$  である。よって、

$$2\pi i \times \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2}}}{2i} = (1 + e^{-\pi\omega}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega s}}{e^s + e^{-s}} ds$$

となり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega s}}{e^s + e^{-s}} ds = \frac{\pi e^{-\frac{\pi\omega}{2}}}{1 + e^{-\pi\omega}} = \frac{\pi \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2}}{2}$$

である。複素共役をとっても同じだから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(s) \sin \omega s ds = -\sqrt{2}\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega s} + e^{-i\omega s}}{e^s + e^{-s}} ds = -\sqrt{2}\pi\omega \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2}$$

となる。これで、メルニコフ関数が

$$M(t_0, \tau_0) = -\frac{4\delta}{3} + \sqrt{2}\pi\gamma\omega \sin(\tau_0 + \omega t_0) \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2}$$

と求まった。  $M$  が零点を持つのは、

$$\left| -\frac{4\delta}{3} \right| \leq \left| \sqrt{2}\pi\gamma\omega \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2} \right|$$

つまり、

$$\left| \frac{\delta}{\gamma} \right| \leq \frac{3\sqrt{2}}{4} \pi |\omega| \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2} \quad (2.5)$$

のときで、

$$-\frac{4\delta}{3} + \sqrt{2}\pi\gamma\omega \sin(\tau_0 + \omega t_0) \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2} = 0$$

を満たす  $t_0, \tau_0$  である。零点で

$$\frac{\partial M}{\partial t_0}(t_0, \tau_0) = \sqrt{2}\pi\gamma\omega^2 \cos(\tau_0 + \omega t_0) \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2}$$

が0になつてはならないから,  $\gamma \neq 0, \omega \neq 0$  であり, さらに  $\cos(\tau_0 + \omega t_0) \neq 0$  である.  
(2.5) が等号の場合は,  $\sin(\tau_0 + \omega t_0) = \pm 1$  で  $\cos(\tau_0 + \omega t_0) = 0$  となってしまうので,

$$\left| \frac{\delta}{\gamma} \right| < \frac{3\sqrt{2}}{4} \pi |\omega| \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2}$$

のとき, 十分小さな  $\varepsilon \neq 0$  で横断的ホモクリニック軌道が存在する.

摩擦の項の係数  $\delta$  が小さければ良いということである. また, 摩擦がない場合, つまり  $\delta = 0$  のときも

$$0 < \frac{3\sqrt{2}}{4} \pi |\omega| \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2}$$

であれば良い.

6/21

## 2.6 マルコフ分割

双曲型不動点  $p$  の周りでは  $f(p)$  はほぼ  $Df(p)$  で近似できて, 固有値に関する仮定より  $p$  に近づく方向と離れる方向に分かれた.

双曲性はもっと一般化できる.

**定義 2.2.**  $f: M \rightarrow M$  の不変集合  $\Lambda$  が双曲型であるとは, 各  $x \in \Lambda$  での  $M$  の接空間が  $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$  直和に分解できて, 以下が成り立つことである:

1.  $Df(x)(E_x^s) = E_{f(x)}^s, Df(x)(E_x^u) = E_{f(x)}^u$
2.  $C > 0$  と  $0 < \lambda < 1$  が存在して

$$\|Df^n(x)v\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad (n \in \mathbb{N}, v \in E_x^s)$$

$$\|Df^{-n}(x)v\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad (n \in \mathbb{N}, v \in E_x^u)$$

をみます.

$\Lambda$  が双曲型不変集合であるとき,  $\Lambda$  の各点  $x$  で安定多様体, 不安定多様体が定まり, それらは滑らかな多様体となる. 定義は

$$W^s(x) = \left\{ y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \right\}$$

$$W^u(x) = \left\{ y \in M \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \right\}$$

である.

記号力学系の手法は, マルコフ分割というものにより, 孤立したコンパクト双曲型不変集合というに拡張され, より一般的な記号力学系を用いて, 理解することができる.

1つだけ例をあげよう.  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  とする. つまり,  $\mathbb{R}^2$  の2点  $(x, y), (x', y')$  について  $(x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$  であれば同一視する. さて, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

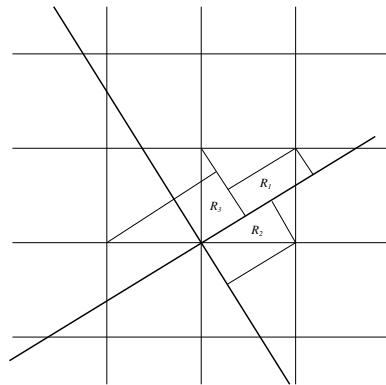


図 2.8 マルコフ分割

による線形変換を考える． $A^{-1}$  も整数成分の行列であることから，これは自然に  $\mathbb{T}^2$  から  $\mathbb{T}^2$  への同相写像を誘導する．この写像  $L_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  による力学系を考えよう． $A$  の固有値は  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$  で，固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \pm \sqrt{5} \end{pmatrix}$  である．

図 2.8 のように，固有ベクトル方向の直線をもとに， $\mathbb{T}^2$  を 3 つの長方形  $R_1, R_2, R_3$  に分割する．これらの領域は  $L_A$  で写すと

$$\begin{aligned} L_A(R_1) &\subset R_1 \cup R_2 \cup R_3 \\ L_A(R_2) &\subset R_2 \cup R_3 \\ L_A(R_3) &\subset R_1 \cup R_3 \end{aligned}$$

となる．3 次行列  $S = (S_{ij})$  を

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & (L_A(\text{int}R_i) \cap \text{int}R_j \neq \emptyset) \\ 0 & (L_A(\text{int}R_i) \cap \text{int}R_j = \emptyset) \end{cases}$$

により定める．すなわち，

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．この  $S$  を構造行列という．これに対し，記号列の集合を

$$\Sigma_S = \{ \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mid a_i = 1, 2, 3, S_{a_{i+1}a_i} = 1 \}$$

により定める． $\Sigma_S$  上ではシフト写像  $\sigma$  が自然に定まる．各  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_S$  に対して，

$$L_A^i(x) \in R_{a_i} \quad (\forall i \in \mathbb{Z})$$

となる  $x \in \mathbb{T}^2$  が一意に定まる．この対応により  $L_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  と  $\sigma: \Sigma_S \rightarrow \Sigma_S$  は位相半共役になる．(長方形の境界だけ 1 対 1 でないがそこだけを省けば位相共役である．)

より一般の力学系でも双曲型不変集合があり，それが局所積構造<sup>\*5</sup> という性質を持てば，その不変集合上の力学系は，マルコフ分割により  $0, 1$  を成分として持つある  $n$  次正方行列  $S$  を構造行列とする記号力学系と位相半共役になる．

<sup>\*5</sup>  $f$  の双曲型不変集合  $\Lambda$  が局所積構造をもつとは，ある  $r > 0$  が存在して任意の  $p, q \in \Lambda$  に対して  $W_r^u(p) \cap W_r^s(q) \subset \Lambda$  となることである． $W_r^u(p)$  は  $p$  の  $r$  近傍で定義される  $p$  の不安定多様体の  $p$  を含む連結成分と考えておけば良い．正確な定義は，[3] を参照．





## 第3章

# 様々な力学系理論

### 3.1 低次元力学系

力学系は相空間が高次元の方が難しいわけだから、低次元力学系に関する研究が膨大にある。ここでは、1つの基本的な結果であるポアンカレ-ベンディクソンの定理を紹介する。

連続力学系  $\varphi^t(x) (x \in M)$  を考える。  $y \in M$  はある実数列  $t_n \rightarrow \infty$  と  $x \in M$  により  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(x) = y$  となるとき  $y$  は  $x$  の  $\omega$  極限点であるという。  $x$  の  $\omega$  極限点の集合を  $\omega(x)$  と書き、  $\omega$  極限集合という。

同様に  $t_n \rightarrow -\infty$  としたものを  $\alpha$  極限点、  $\alpha$  極限集合という。  $x$  の  $\alpha$  極限集合を  $\alpha(x)$  と表す。

**問題 5.**

$$\omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\varphi^t(x) \mid t \geq T\}}$$

を示せ。上付きバーは閉包である。

これより、  $\omega(x)$  は閉集合で、  $\varphi^t$  で不変である。

**問題 6.**  $y \in \omega(x)$  ならば  $\omega(y) \subset \omega(x)$  が成り立つことを示せ。

**定理 3.1** (ポアンカレ-ベンディクソン). 平面上の連続力学系において、  $x \in \mathbb{R}^2$  の  $\omega$  極限集合  $\omega(x)$  が空でないコンパクト集合であるとする。このとき、  $\omega(x)$  は平衡点を含まなければ、  $\omega(x)$  は周期軌道である。  $\alpha(x)$  についても同様である。

**証明.**  $y \in \omega(x)$  とする。  $\omega(y) \subset \omega(x)$  が成り立つ。まず、  $y$  の軌道が周期軌道であることを示す。  $z \in \omega(y)$  とし、  $z$  は平衡点ではないので、  $z$  における局所切断面  $S$ 、  $z$  の周りの flow box  $N$  が取れる。  $\varphi^{t_n}(y) \rightarrow z$  となる  $t_n \rightarrow \infty$  が取れ、十分大きな  $n$  では  $\varphi^{t_n}(y)$  は  $N$  に属する。これより、  $\varphi^r(y), \varphi^s(y) \in S \cap N$  となる  $r > s$  が存在する。

**補題 3.1.**  $\varphi^r(y)$  と  $\varphi^s(y)$  は一致する。

**証明.** これらの点が異なると仮定する。  $\varphi^r(y), \varphi^s(y) \in \omega(x)$  であるから、これらの点のそれぞれの近くで  $S$  に属する点  $\varphi^{t_1}(x), \varphi^{t_2}(x)$  が存在する。  $t_1 < t_2$  とすると  $\varphi^t(x) (t \in [t_1, t_2])$  と  $S$  で囲まれた領域を考える。  $\varphi^t(x)$  上でベクトル場は接しており、  $S$  では領域の外向きか内向きのどちらかである。すると、  $\varphi^t(x)$  が  $\varphi^r(y), \varphi^s(y)$  のいずれに

も再び近づくことができなくなり、これらが  $\omega(x)$  に属することに反する。  $\square$

$\varphi^r(y) = \varphi^s(y)$  であるから、 $r > s$  とすると  $\varphi^{r-s}(y) = y$  である。  $\omega(x)$  は平衡点を含まなかったから  $O(y)$  は周期軌道であり、 $O(y) \subset \omega(x)$  である。これで、 $\omega(x)$  が周期軌道を含むことが示された。

$\gamma \subset \omega(x)$  を周期軌道とし、 $\gamma = \omega(x)$  を示す。  $z \in \gamma$  とし、 $z$  における  $\gamma$  の切断面を  $S$  とおく。上の補題の証明と同様の考察で、 $t_0 < t_1 < \dots$  で  $\varphi^{t_n}(x) \in S, \varphi^{t_n}(x) \rightarrow z, \varphi^t \notin S (t \in (t_{n-1}, t_n))$  となるものが存在することが分かる。

$x_n = \varphi^{t_n}(x)$  とする。  $z$  の周期を  $\lambda$  とする。  $\varepsilon > 0$  を与えたとき、 $n$  が十分大きければ、 $\varphi^t(x_n)$  は  $\lambda + \varepsilon$  内に  $S$  と交わる。よって、 $t_{n+1} - t_n < \lambda + \varepsilon$  である。

$\beta > 0$  を任意にとると、 $\delta > 0$  が存在して、 $|x_n - u| < \delta, |t| \leq \lambda + \varepsilon$  のとき  $|\varphi^t(x_n) - \varphi^t(u)| < \beta$  となる。

よって、 $n$  を十分大きくとって  $|x_n - z| < \delta$  となるようにすると、 $|t| \leq \lambda + \varepsilon$  に対して、

$$|\varphi^t(x_n) - \varphi^t(z)| < \beta$$

が成り立つ。  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  に対してこの式が成立するから、十分大きな  $t$  で成り立つ。よって、

$$d(\varphi^t(x), \gamma) \leq |\varphi^t(x) - \varphi^{t-t_n}(z)| = |\varphi^{t-t_n}(x_n) - \varphi^{t-t_n}(z)| < \beta$$

となる。これで、 $\varphi^t(x)$  は  $\gamma$  に漸近することが分かった。  $\square$

**注意 3.1.** 定理の仮定を満たさない場合の  $\omega$  集合を考えよう。例えば、 $|\varphi^t(x)| \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$  となるような軌道であれば、 $\omega$  極限集合は空集合である。

$\varphi^t(x)$  が  $t \rightarrow \infty$  で平衡点に収束すれば、 $\omega$  極限集合は平衡点である。

また、図 3.1 のように平衡点とホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道の和集合からなる場合もある。図 3.2 のように  $\omega$  極限集合は連結にならない場合もある。

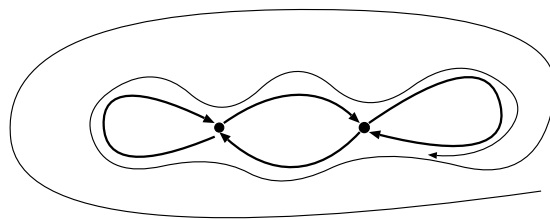


図 3.1

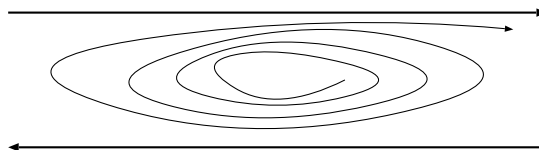


図 3.2

ポアンカレ-ベンディクソンの定理は相空間が  $\mathbb{R}^2$  であることが重要である。例えば、2次元トーラス  $\mathbb{T}^2$  上の微分方程式

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (\theta \in \mathbb{T}^2)$$

を考える。

**問題 7.**  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  の第一成分と第二成分の比が無理数であれば、各軌道の  $\omega$  極限集合は  $\mathbb{T}^2$  全体であることを示せ。

6/28

## 3.2 構造安定性

現実的な現象を写像  $f: M \rightarrow M$  によりモデル化したとしよう。しかし、実際モデル化するときには、色々な微小な影響を無視し、理想化が行われたりする。従って、本当のモデルは  $f$  に近いある力学系  $g$  である。 $f$  が本当の  $g$  と力学系として同じ性質を持つかどうかということを知るために、構造安定性という概念が重要になる。

**定義 3.1.**  $M$  上の力学系  $f$  が構造安定とは、 $f$  に十分近い  $g: M \rightarrow M$  は  $f$  と必ず位相共役であるということを用いる。十分近いとは、

$$d_1(f, g) = \sup_{x \in M} \{d(f(x), g(x)) + \|Df(x) - Dg(x)\|\}$$

が十分小さいことをいう。 $g$  を  $f$  の摂動とも言う。

**例 3.1.**  $\eta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  とする。 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x + \eta$  とし、これから定まる写像  $f: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  を考える。 $\eta$  を少し変えて  $\tilde{\eta}$  としたものの  $g$  は、 $f$  に近い。 $\tilde{\eta}$  は、有理数にとることもできる。すると、 $f$  は周期点を持たないが、 $g$  は周期点を持つ。これは、 $f$  と  $g$  が位相共役でないことを示している。従って、この  $f$  は構造安定ではない。

応用面としての重要性と理論的な豊富さから、構造安定性は活発に研究されてきた。いくつか知られている結果を紹介する。

**定義 3.2.** 力学系  $f: M \rightarrow M$  において、 $x \in M$  が  $f$  の非遊走点であるとは、 $x$  の任意の近傍  $U$  に対してある  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  が存在して、 $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$  が成り立つことである。 $f$  の非遊走点全体の集合を  $\Omega(f)$  と書き、 $f$  の非遊走集合と呼ぶ。

**定義 3.3.** 力学系  $f: M \rightarrow M$  がモース・スモール系であるとは、以下の条件が成り立つことをいう：

1.  $\Omega(f)$  は有限集合である；
2. 周期点は全て双曲型である
3. 任意の周期点  $p, q$  に対して、 $W^u(p)$  と  $W^s(p)$  は横断的である。

$\Omega(f)$  は有限集合であることから、 $\Omega(f)$  はすべて周期点であることが導かれる。

モース・スモール系の例として勾配系がある。

**定義 3.4.** 力学系  $f: M \rightarrow M$  について, ある関数  $U: M \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して,  $f(x) \neq x$  となる  $x$  に対して  $U(f(x)) < U(x)$  が成り立つとき,  $f$  は勾配的であるという.

勾配的な力学系は, 離散力学系より連続力学系の方が理解しやすいかもしれない. 常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = v(x) \quad (x \in M)$$

は,

$$v(x) = -\nabla U(x)$$

となる関数  $U: M \rightarrow \mathbb{R}$  が存在するとき, つまり

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla U(x) \quad (x \in M) \quad (3.1)$$

と表せるとき勾配系であるという. 微分方程式の各解  $x(t)$  について,

$$\frac{d}{dt}U(x(t)) = DU \frac{dx}{dt} = -|DU|^2 \leq 0$$

であるから,  $x(t)$  は  $U$  の値が減少するように流れる. (3.1) の流れを  $\varphi^t(x)$  とする.  $x \mapsto \varphi^1(x)$  は離散力学系として勾配系である.

勾配系のすべての不動点が双曲的で, 任意の2つの不動点の安定多様体と不安定多様体が横断的になれば, モース・スモール系である. 安定多様体と不安定多様体は必ずしも横断的にはならないが, 少し摂動すれば横断的になるようにできる.

さて, 構造安定性の話に戻ろう.

**定理 3.2** (パリス・スモール).  $M$  がコンパクトで  $f: M \rightarrow M$  がモース・スモール系であるとすると,  $f$  は構造安定である.

**定義 3.5.**  $f: M \rightarrow M$  について,  $M$  が双曲型であるとき,  $f$  はアノソフ系であるという.

アノソフ系の例として, 前に挙げた  $L_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  がある.

**定理 3.3** (アノソフ). アノソフ系は構造安定である.

モース・スモール系かつアノソフ系である力学系は存在しないので, この定理はパリス・スモールの定理には完全に含まれない結果である.

$f: M \rightarrow M$  に対して,  $P(f)$  を  $f$  の周期点全体の集合とする.

**定義 3.6.**  $f: M \rightarrow M$  が公理 A を満たすとは,  $\Omega(f)$  が双曲型でかつ  $\Omega(f) = \overline{P(f)}$  となることをいう. 公理 A を満たす力学系  $f: M \rightarrow M$  について,  $x, y \in \Omega(f)$  に対し  $W^s(x)$  と  $W^u(y)$  が横断的になるとき,  $f$  は強横断性条件を満たすという.

構造安定性を特徴付けるのに決定的なのは次の定理である.

**定理 3.4.**  $M$  をコンパクトとする.  $f: M \rightarrow M$  が構造安定であるための必要十分条件は,  $f$  が公理 A で強横断性条件を満たすことである.

この定理は, ロビンソン, マニエ, 三波, タオらの結果を合わせたものである. 連続力学系に対する同様の結果は, ロビンソン, 林修平により示されている.

### 3.3 分岐理論

構造安定な力学系は、双曲性を持っているものであることがわかったが、構造安定でない力学系は摂動により変化する。分岐理論はその変化の仕方を調べる分野である。

不動点や周期点の分岐については多くの結果がある。

**例 3.2.**  $f_\mu(x) = \mu + x - x^2$  で定まる力学系  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を考えよう。この不動点を調べる。不動点は  $f_\mu(x) = x$  を満たす  $x$  だから、容易に  $\mu > 0$  なら 2つ、 $\mu = 0$  なら 1つ存在し、 $\mu < 0$  なら存在しないことがわかる。また、 $\mu > 0$  のとき不動点  $x = \sqrt{\mu}$  は安定で、 $x = -\sqrt{\mu}$  は不安定である (図 3.3)。

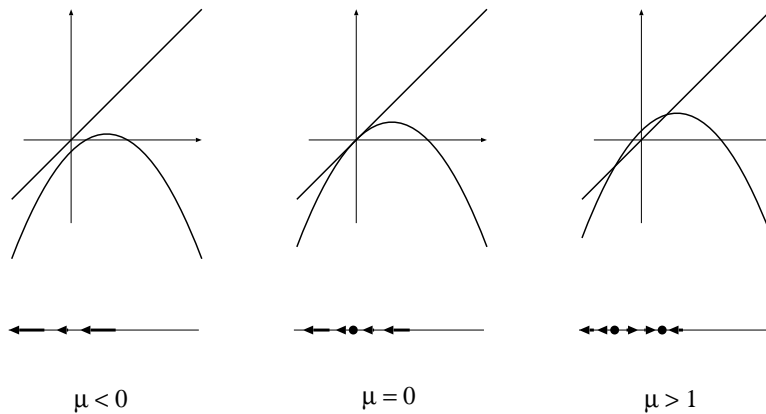


図 3.3

不動点の位置と  $\mu$  の関係を書いたものが図 3.4 であり、分岐図という。安定な不動点を実線、不安定な不動点を点線で描いた。

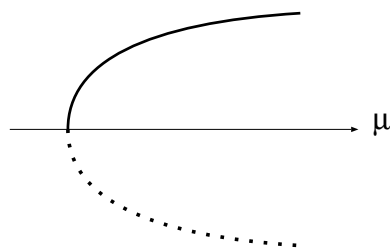


図 3.4

この例を一般化して、次の定理が成り立つ。

**定理 3.5** (サドル・ノード分岐).  $f_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が以下を満たすとすると:

1.  $f_{\mu_0}(x_0) = x_0$
2.  $f'_{\mu_0}(x_0) = 1$
3.  $f''_{\mu_0}(x_0) \neq 0$

$$4. \left. \frac{\partial f_\mu(x_0)}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_0} \neq 0$$

このとき、 $x$  の関数  $m(x)$  が存在して、

1.  $f_{m(x)}(x) = x$
2.  $m(x_0) = \mu_0$
3.  $m'(x_0) = 0, m''(x_0) \neq 0$

がなりたつ。

サドル・ノード分岐は高次元でも起こる。

他の分岐の例を挙げておこう。サドル・ノード分岐と同様に一般的な定理として述べることができるが、ここでは例を挙げるだけに留める。分岐理論については、[2] が詳しい。

**例 3.3.**  $f_\mu(x) = -x - \mu x + x^3$  を考える。  $x = 0$  は常に不動点である。また、 $\mu > 0$  なら  $f_\mu(\sqrt{\mu}) = -\sqrt{\mu}, f_\mu(-\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$  であるから、 $x = \pm\sqrt{\mu}$  は 2 周期点である。

不動点  $x = 0$  は  $\mu < 0$  のとき安定で、 $\mu > 0$  で不安定化する。  $\mu > 0$  のとき 2 周期点  $x = \pm\sqrt{\mu}$  は安定である (図 3.5)。 図 3.6 は 2 周期の周期点の分岐図である。

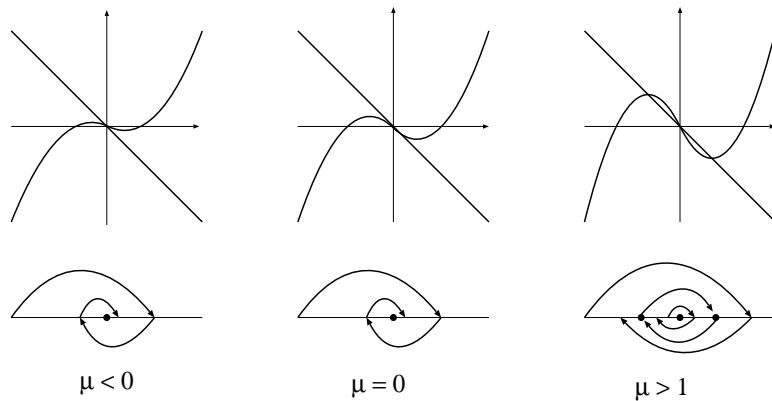


図 3.5

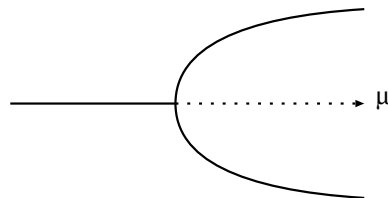


図 3.6

このような分岐を、周期倍分岐という。サドル・ノード分岐と同様に、周期倍分岐が起こる一般的な条件を与えることができる。

次に述べる分岐は、連続力学系の方がわかりやすので、微分方程式の例を挙げる。

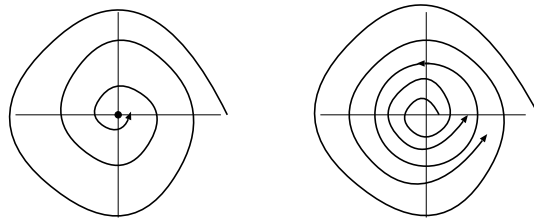


図 3.7

例 3.4. 常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f_{\mu}(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g_{\mu}(x, y)$$

を極座標  $(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$  に変換したとき,

$$\frac{dr}{dt} = \mu r - r^3, \quad \frac{d\theta}{dt} = \beta(\mu)$$

の形になったとする.  $r = 0$  は不変だから,  $(x, y) = (0, 0)$  は常に平衡点である.  $r$  の方程式より  $\mu < 0$  のとき,  $(0, 0)$  は安定である. その周辺の解は  $(0, 0)$  に巻きつきながら収束する.  $\mu > 0$  だと  $(0, 0)$  は不安定になるが,  $r = \sqrt{\mu}$  に対応する周期解が現れ, それは安定である (図 3.7).

このような分岐をホップ分岐という. サドル・ノード分岐と同様に, ホップ分岐が起こる一般的な条件を与えることができる. また, ホップ分岐の離散版もある,

~7/5, 7/19

### 3.4 KAM 理論

[4] を参照されたい.

7/26, 8/2

### 3.5 周期解の変分解析

[5] を参照されたい.





## 付録 A

### 補足

#### A.1 常微分方程式の解の存在と一意性

1 階の連立常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.1})$$

を考える。常微分方程式に初期条件を

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{a}$$

と与えたときに、解は存在するか、存在するとすれば一意のかということについて論ずる。

写像  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  が、領域 (開集合)  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  で、ある定数  $L$  に対して常に

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad ((\mathbf{x}, t) \in D)$$

を満たすとき、 $\mathbf{f}$  は  $D$  で Lipschitz 条件を満たすという。このとき、 $L$  を Lipschitz 定数といい、 $\mathbf{f}$  は Lipschitz(連続) 関数であるという。Lipschitz 関数は  $\mathbf{x}$  について連続である。

例えば、 $V$  が有界かつ凸で  $\mathbf{f}$  が  $V \times (a, b)$  ( $-\infty < a < b < \infty$ ) で  $C^1$  級でさらに  $\mathbf{f}$  の導関数が  $V$  の閉包  $\bar{V} \times [a, b]$  でも連続になるようなとき、 $\mathbf{f}$  は  $V \times (a, b)$  で Lipschitz 条件を満たす。なお、集合  $V$  が凸であるとは、 $V$  の任意の点  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  を取ったとき  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  を結ぶ線分も  $V$  に含まれることをいう。さて、 $\mathbf{f}$  がこのような関数であれば、Lipschitz 条件を満たすことを確かめておこう。 $\mathbf{f}$  の  $\mathbf{x}$  に関するヤコビ行列  $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}$  は連続であり、 $\bar{V} \times [a, b]$  はコンパクト (有界閉集合である) ので、有界である。 $L = \sup_{\mathbf{x} \in \bar{V}, t \in [a, b]} |D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)|$  とする。 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, t \in (a, b)$  とすると、 $\varphi(s) = (1-s)\mathbf{x} + s\mathbf{y}$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) &= \mathbf{f}(\varphi(0), t) - \mathbf{f}(\varphi(1), t) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}(\varphi(s), t)}{\partial s} ds \\ &= \int_0^1 D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\varphi(s), t) \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s} ds \\ &= \int_0^1 D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\varphi(s), t)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)| &\leq \left| \int_0^1 D_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\varphi(s), t) (\mathbf{y} - \mathbf{x}) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |D_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\varphi(s), t) (\mathbf{y} - \mathbf{x})| ds \\ &\leq \int_0^1 L |\mathbf{y} - \mathbf{x}| ds = L |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \end{aligned}$$

となる。

**定理 A.1.** 常微分方程式 (A.1) について、 $\mathbf{f}$  が  $D$  で Lipschitz 条件を満たすとする。 $(\mathbf{a}, t_0)$  が  $D$  の内点ならば、ある  $\delta > 0$  が存在して、 $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  において (A.1) の初期条件

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{a}$$

を満たす解  $\mathbf{x}(t)$  がただ一つ存在する。

定理 A.1 を Picard の逐次近似法により証明する。  $n = 1$  の場合のみ考える。一般の  $n$  でも本質的に同じである。

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

で初期条件は

$$x(t_0) = a$$

と表される。

$D$  が長方形領域

$$U = \{(x, t) \mid |x - a| \leq A, |t - t_0| \leq B\}$$

を含み、 $U$  における  $|f(x, t)|$  の最大値を  $M$  とする。

$$\delta = \min \left\{ B, \frac{A}{M} \right\}$$

とする。当然、もっと大きくとれることもある。  $A$  も  $B$  もいくらでも大きくとれるのであれば、 $\delta = \infty$  としてもよい。

$x(t)$  が微分方程式と初期値を満たすための必要十分条件は積分方程式

$$x(t) = a + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$$

を満たすことである。この観点をもとに、求める解に収束するような関数の列を構成する。ここでは、添え字を上を書くことにする。帰納的に関数  $x^k(t)$  を構成する。

$$x^0(t) = a, x^1(t) = a + \int_{t_0}^t f(a, s) ds$$

により  $x^0(t), x^1(t)$  を定める。さらに、

$$x^2(t) = a + \int_{t_0}^t f(x^1(s), s) ds$$

により  $x^2(t)$  を定める. 同様に,  $x^k(t)$  まで定まったとき

$$x^{k+1}(t) = a + \int_{t_0}^t f(x^k(s), s) ds \quad (\text{A.2})$$

により  $x^{k+1}(t)$  を定める. そのようにして関数の族  $\{x^k(t)\}$  が定まる.

**補題 A.1.**  $x^k(t)$  は  $k \rightarrow \infty$  のとき  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  上である関数  $x(t)$  に一様収束する.

**証明.** まず,  $|x^k(t) - a| \leq A$  ( $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ ) であることを示そう.  $x^0$  は満たす.  $x^k(t)$  がこの不等式を満たすとすると,

$$|x^{k+1}(t) - a| = \left| \int_{t_0}^t f(x^k(s), s) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(x^k(s), s)| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| = M|t - t_0| \leq M \frac{A}{M} = A$$

であるから,  $x^{k+1}(t)$  も満たす. よって, 帰納法によりすべての  $k = 0, 1, 2, \dots$  に対して,  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  において  $|x^k(t) - a| \leq A$  は成り立つ. よって,  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], k \in \mathbb{N}$  ならば

$$(x^k(t), t) \in U \subset D$$

である.

$t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  について

$$\begin{aligned} |x^{k+1}(t) - x^k(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(x^k(s), s) - f(x^{k-1}(s), s) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(x^k(s), s) - f(x^{k-1}(s), s)| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L|x^k(s) - x^{k-1}(s)| ds \right| \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,

$$|x^1(t) - x^0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(a, s) ds \right| \leq M|t - t_0|$$

をもとに帰納的に  $|x^k(t) - x^{k-1}(t)|$  を評価する.

$$\begin{aligned} |x^2(t) - x^1(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t L|x^1(s) - x^0(s)| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t LM|s - a| ds \right| \\ &\leq \frac{LM}{2}|t - t_0|^2 \end{aligned}$$

となる. さらに,

$$\begin{aligned} |x^3(t) - x^2(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t L|x^2(s) - x^1(s)| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \frac{LM}{2} |s - t_0|^2 ds \right| \\ &\leq \frac{L^2 M}{3!} |t - t_0|^3 \end{aligned}$$

を得る. これを繰り返すことにより,

$$|x^k(t) - x^{k-1}(t)| \leq \frac{L^{k-1}M}{k!} |t - t_0|^k$$

が得られる. これを用いて,  $l < m$  に対して,

$$\begin{aligned} |x^m(t) - x^l(t)| &\leq |x^m(t) - x^{m-1}(t)| + |x^{m-1}(t) - x^{m-2}(t)| + \cdots + |x^{l+1}(t) - x^l(t)| \\ &\leq \frac{L^{m-1}M}{m!} |t - t_0|^m + \frac{L^{m-2}M}{(m-1)!} |t - t_0|^{m-1} + \cdots + \frac{L^l M}{(l+1)!} |t - t_0|^{l+1} \\ &\leq \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{L^{k-1}M}{k!} |t - t_0|^k \\ &\leq \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{L^{k-1}M}{k!} \delta^k \end{aligned}$$

が成り立つ.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{k-1}M}{k!} \delta^k$$

は  $\frac{M}{L} e^{L\delta}$  に収束するので, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $N > 0$  が存在して,  $l > N$  ならば

$$0 < \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{L^{k-1}M}{k!} \delta^k = \frac{M}{L} e^{L\delta} - \sum_{k=0}^l \frac{L^{k-1}M}{k!} \delta^k < \varepsilon$$

が成り立つ. したがって,  $m > l > N$  なら

$$|x^m(t) - x^l(t)| < \varepsilon$$

が成り立つ.  $t$  は  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  の任意の数だから,  $x^k(t)$  はこの区間上である関数  $x(t)$  に一様収束する.  $\square$

(A.2) で  $k \rightarrow \infty$  とすることで  $x(t)$  は

$$x(t) = a + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$$

を満たす. ここで,  $f$  の Lipschitz 連続性と,  $x^k$  の一様収束性から  $f(x^k(s), s)$  の一様収束性もいえて, そのことから  $\lim_{k \rightarrow \infty}$  と  $\int_{t_0}^t$  の交換可能性, つまり項別積分可能であることが保証されている.  $t = t_0$  とすると初期条件を満たすことが分かり,  $t$  で微分すると微分方程式を満たすことも分かる.

次に, 一意性について考える.

**補題 A.2.** (A.1) の初期条件を定めた解はただ 1 つである.

証明. 同じ初期条件を満たす 2 つの解  $x(t), y(t)$  が存在したとする.

$$\begin{aligned} x(t) &= a + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds \\ y(t) &= a + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds \end{aligned}$$

が成り立つ.  $|x(t) - y(t)|$  が恒等的に 0 でないと仮定する.  $|x(t_1) - y(t_1)| > 0$  となる  $t_1$  をとる.

$\varepsilon > 0$  を  $1/L$  より小さくとり,  $N > 0$  を  $t_1 < t < t_1 + \varepsilon$  における  $|x(t) - y(t)|$  の最大値とする. その最大値をとる  $t$  に対して

$$\begin{aligned} N = |x(t) - y(t)| &= \left| \int_{t_1}^t f(x(s), s) - f(y(s), s) ds \right| \\ &\leq \int_{t_1}^t |f(x(s), s) - f(y(s), s)| ds \\ &\leq \int_{t_1}^t L|x(s) - y(s)| ds \\ &\leq \int_{t_1}^t LN ds \\ &= LN(t - t_1) < LN\varepsilon < N \end{aligned}$$

となり矛盾する. 従って,  $|x(t) - y(t)| = 0$  となり, つまり解は一意的である.  $\square$

これで, 常微分方程式の解の存在と一意性が示された. 解が関数  $x^k(t)$  の極限として得られることに注意していただきたい.  $x^k(t)$  から  $x^{k+1}$  を得るには積分が必要であったので, 無限回の積分操作を行って得られる解と言える. 従って, 解が具体的な関数として得られるわけではない. 解が求まることと, 存在することは, 別のことである.

また, Lipschitz 連続性は  $x, t$  を有界閉集合の範囲で考え,  $f$  が  $C^1$  級であれば成立する.

例 A.1.

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

を考える.  $f(x) = x^2$  とすると,

$$|f(x) - f(y)| = |x + y||x - y|$$

であり  $|x + y|$  はいくらでも大きくなるので  $f(x)$  は  $\mathbb{R}$  全体では Lipschitz 条件を満たさない. しかし,  $x$  の範囲を  $[p, q]$  に限定すると,  $f(x)$  は Lipschitz 条件を満たす. Lipschitz 定数は  $L = 2 \max\{|p|, |q|\}$  である. 従って, 初期条件  $x(t_0) = a \in (p, q)$  と定める. 解  $x(t)$  は  $t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$  の範囲で存在する.

実際にこの微分方程式を解いてみよう.  $a = 0$  の場合は  $x(t) = 0$  が解となるから,  $a \neq 0$  とすると

$$\begin{aligned} \int_a^x x^{-2} dx &= \int_{t_0}^t 1 dt \\ -\frac{1}{x} + \frac{1}{a} &= t - t_0 \\ x(t) &= \frac{a}{1 - at + at_0} \end{aligned}$$

よって,  $a > 0$  の場合, 解は  $t < a^{-1} + t_0$  の範囲で存在する.  $t \rightarrow a^{-1} + t_0 - 0$  のとき  $x(t) \rightarrow +\infty$  となる.

同様に,  $a < 0$  の場合, 解は  $t > a^{-1} + t_0$  の範囲で存在し,  $t \rightarrow a^{-1} + t_0 + 0$  のとき  $x(t) \rightarrow -\infty$  となる.

例 A.2.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

とし常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

の初期条件

$$x(0) = 0$$

を満たす解を考える.  $f(x)$  は連続であるが, *Lipschitz* 条件は満たさない.  $t > c$  から  $x > 0$  となったとして計算すると

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \int 1 dt \\ 2\sqrt{x} &= t - c \\ x &= \frac{1}{4}(t - c)^2 \end{aligned}$$

つまり,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq c \\ \frac{1}{4}(t - c)^2 & t > c \end{cases}$$

が解になる.  $c \geq 0$  は何をとっても初期条件を満たす解になるので, 解は無限に存在する.  $f$  は  $x = 0$  の近くで *Lipschitz* 条件を満たさないためである.

普通に現れる常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

の多くは,  $\mathbf{f}$  は  $C^1$  級であろうから, 少なくとも局所的には *Lipschitz* 条件を満たす. したがって, 初期条件  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  を与えたとき, 少なくとも  $t_0$  に十分近い  $t$  で定まる解  $\mathbf{x}(t)$  が存在し, 一意であることが保証された.

なお, 応用上,  $\mathbf{f}$  は  $C^1$  級である場合が多いが, 近年は不連続な関数  $\mathbf{f}$  を扱うハイブリッド力学系も重要性が高まっている.

## A.2 初期値に関する依存性

常微分方程式の初期値を変化させたときに解の変化の仕方について触れておく.

常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

の初期条件

$$\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}$$

を満たす解を

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}, t_0, t)$$

と書くことにする.

**定理 A.2.**  $\mathbf{f}$  は *Lipschitz* 連続であるとする. このとき,  $\varphi$  は  $(\boldsymbol{\xi}, t_0, t)$  に関して連続である. さらに,  $\mathbf{f}$  が  $C^r$  級であれば,  $\varphi$  は  $(\boldsymbol{\xi}, t_0, t)$  に関して  $C^{r-1}$  級である.

補題として次を示しておく.

補題 A.3 (Gronwall の不等式).  $\psi(t), p(t)$  を  $t \in [a, b]$  で定義された関数とし,

$$0 \leq \psi(t) \leq C + \int_a^t p(s)\psi(s)ds$$

を満たすとする. このとき,  $t \in [a, b]$  で

$$0 \leq \psi(t) \leq C \exp\left(\int_a^t p(s)ds\right)$$

が成り立つ.

証明.

$$\zeta(t) = C + \int_a^t p(s)\psi(s)ds$$

とおくと,

$$\zeta'(t) = p(t)\psi(t) \leq p(t)\zeta(t)$$

が成り立つ. よって,

$$\frac{d}{dt} \left( \zeta(t) \exp\left(-\int_a^t p(s)ds\right) \right) = (\zeta'(t) + \zeta(t)(-p(t))) \exp\left(-\int_a^t p(s)ds\right) \leq 0$$

が成り立つ. よって,

$$\zeta(a) \exp\left(-\int_a^a p(s)ds\right) \geq \zeta(t) \exp\left(-\int_a^t p(s)ds\right)$$

すなわち,

$$\zeta(t) \leq \zeta(a) \exp\left(\int_a^t p(s)ds\right)$$

$\zeta(a) = C$  であるから

$$0 \leq \psi(t) \leq \zeta(t) \leq C \exp\left(\int_a^t p(s)ds\right)$$

が成り立つ. □

定理 A.2 の証明 簡単のため  $n = 1, x \in \mathbb{R}$  の場合を示す. 一般の  $n$  の場合も全く同様である.  $\varphi(\xi, t_0, t)$  は  $t$  に関しては微分可能で連続であるから,  $\xi, t_0$  に関する連続性を示せば良い.  $\varphi$  は

$$\varphi(\xi, t_0, t) = \xi + \int_{t_0}^t f(\varphi(\xi, t_0, s), s)ds$$

を満たすから,

$$\begin{aligned} |\varphi(\xi, t_0, t) - \varphi(\xi', t'_0, t)| &= \left| (\xi - \xi') + \int_{t_0}^t f(\varphi(\xi, t_0, s), s)ds - \int_{t'_0}^t f(\varphi(\xi', t'_0, s), s)ds \right| \\ &\leq |\xi - \xi'| + \left| \int_{t'_0}^{t_0} f(\varphi(\xi', t'_0, s), s)ds \right| \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t f(\varphi(\xi, t_0, s), s) - f(\varphi(\xi', t'_0, s), s)ds \right| \end{aligned}$$

となる。  $\varepsilon > 0$  を任意にとったとき、  $\xi$  と  $\xi'$ 、  $t_0$  と  $t'_0$  を十分近く取ると、

$$|\xi - \xi'| + \left| \int_{t'_0}^{t_0} f(\varphi(\xi', t'_0, s), s) ds \right| < \varepsilon$$

が成り立つ。 また、 Lipschitz 条件より

$$|f(\varphi(\xi, t_0, s), s) - f(\varphi(\xi', t'_0, s), s)| \leq L|\varphi(\xi, t_0, s) - \varphi(\xi', t'_0, s)|$$

がなりたつ。 従って、  $t \geq t_0$  とすると

$$|\varphi(\xi, t_0, t) - \varphi(\xi', t'_0, t)| \leq \varepsilon + L \int_{t_0}^t |\varphi(\xi, t_0, s) - \varphi(\xi', t'_0, s)| ds$$

となる。 Gronwall の不等式より、

$$|\varphi(\xi, t_0, t) - \varphi(\xi', t'_0, t)| \leq \varepsilon \exp(L(t - t_0))$$

が成り立つ。  $t < t_0$  の場合は、  $t$  を  $-\tau$  に置き直して、

$$\frac{dx}{d\tau} = -f(x, -\tau)$$

を考えればよい。 □

$\varphi$  の連続性から次のようなことがいえる。  $t, t_0 \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n$  を任意にとり固定しておく。 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、  $\delta > 0$  が存在して、  $|\eta - \xi| < \delta$  ならば  $|\varphi(\eta, t_0, t) - \varphi(\xi, t_0, t)| < \varepsilon$  が成り立つ。 また、  $t, t_0$  の範囲が固定した有界閉区間  $[a, b]$  内であれば、 同様の不等式が成り立つ。

ところで、 初期値に関する敏感な依存性とはある  $C > 0$  が存在して、 任意の  $\xi \in \mathbb{R}^n$  と任意の  $t_0 \in \mathbb{R}$  と任意の  $\delta > 0$  に対して、  $|\eta - \xi| < \delta$  かつ  $|\varphi(\eta, t_0, t) - \varphi(\xi, t_0, t)| > C$  をみたす  $\eta \in \mathbb{R}^n$  と  $t \in \mathbb{R}$  が存在するというのであった。

これらの 2 つの違いは  $t, t_0$  の範囲を有界にするか非有界にするかの違いで、 カオスの 1 つの特徴が長時間挙動を見ることなしでは捉えられないことが分かる。

### A.3 パラメータを持つ微分方程式

様々なモデルに基づいて作られた微分方程式は、 パラメータを持つ場合が多い。 パラメータに応じて微分方程式の解がどのように変化するかというのは興味深い問題である。

ここでも、 一般の  $\mathbb{R}^n$  上の微分方程式でも成立することだが、  $n = 1$  の場合に限定して話を進める。 パラメータ  $\mu \in \mathbb{R}$  をもつ微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t; \mu)$$

を考える。 初期条件  $x(t_0) = x_0$  を仮定する。 この初期条件を満たす解を、  $\varphi(t; \mu)$  と表す。

**定理 A.3.** 各  $\mu$  について  $f$  は Lipschitz 条件を満たすとし、  $f(x, t; \mu)$  は  $\mu \rightarrow \mu_0$  のとき  $f(x, t; \mu_0)$  に  $t \in [a, b]$  で一様収束するとする。 このとき、  $\varphi(t; \mu)$  も  $\mu \rightarrow \mu_0$  のとき  $\varphi(t; \mu_0)$  に  $[a, b]$  で一様収束する。



証明.

$$\varphi(t; \mu) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s; \mu); \mu) ds$$

より  $t \geq t_0$  とすると

$$\begin{aligned} |\varphi(t; \mu) - \varphi(t; \mu_0)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s; \mu); \mu) - f(s, \varphi(s; \mu_0); \mu_0)| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s; \mu); \mu) - f(s, \varphi(s; \mu); \mu_0)| ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s; \mu); \mu_0) - f(s, \varphi(s; \mu_0); \mu_0)| ds \end{aligned}$$

ここで、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、 $\mu$  を  $\mu_0$  に十分近くとると  $f$  の一様収束性より

$$|f(s, \varphi(s; \mu); \mu) - f(s, \varphi(s; \mu); \mu_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ。また、Lipschitz 条件より

$$\int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s; \mu); \mu_0) - f(s, \varphi(s; \mu_0); \mu_0)| ds \leq L \int_{t_0}^t |\varphi(s; \mu) - \varphi(s; \mu_0)| ds$$

が成り立つ。以上より、

$$|\varphi(t; \mu) - \varphi(t; \mu_0)| \leq \varepsilon(b-a) + L \int_{t_0}^t |\varphi(s; \mu) - \varphi(s; \mu_0)| ds$$

が成り立つ。Gronwall の不等式より、

$$|\varphi(t; \mu) - \varphi(t; \mu_0)| \leq \varepsilon(b-a) \exp(L(t-t_0)) \leq \varepsilon \exp(L(b-t_0))$$

が成り立つ。故に、 $\varphi(t; \mu)$  は  $\mu \rightarrow \mu_0$  のとき  $\varphi(t; \mu_0)$  に  $[a, b]$  上で一様収束する。  $\square$

上の定理では、 $\varphi(t; \mu)$  が全ての  $t$  で定義できているとしても、 $t$  の範囲を有界閉区間  $[a, b]$  に制限すると一様収束であるということだから、 $\mathbb{R}$  上では広義一様収束であることを意味する。このことは、 $\mathbb{R}$  上で一様収束性は一般には成立せず、そのことが  $t \rightarrow \infty$  の解の振る舞いが  $\mu$  により大きく変わりうることを意味する。

分岐理論ではパラメータの変化により力学系の性質の変化を調べるわけだが、そこでも長時間挙動により違いが見出されることが分かる。

## A.4 ポアンカレ写像の滑らかさ

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in M)$$

の流れを  $\varphi^t(\mathbf{x})$  とする。ポアンカレ写像  $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$  を考える。適当に座標をとって、ポアンカレ断面  $\Sigma$  は  $\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in M \mid x_n = 0\}$  の部分集合になっているとする。仮定より、 $f_n(\mathbf{x}) \neq 0 (\mathbf{x} \in \Sigma)$  である。 $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$  を固定し、 $P(\mathbf{x}_0) = \varphi^T(\mathbf{x}_0) (T > 0)$  とする。

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi^t(\mathbf{x}_0) \right|_{t=T} = f_n(P(\mathbf{x}_0)) \neq 0$$

であるから、陰関数の定理より  $\mathbf{x}_0$  の近傍で滑らかな関数  $\tau(\mathbf{x})$  が存在して、 $f_n(\varphi^{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x})) = 0$  が成り立つ。これより、 $P(\mathbf{x}) = \varphi^{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$  は滑らかである。各点の近傍で、 $P$  の滑らかさが示されるから、 $P$  は滑らかな写像である。



## 参考文献

- [1] 國府寛司, 力学系の基礎, 朝倉書店, 2000 年
- [2] Yuri A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer-Verlag New York, 1995.
- [3] ロビンソン, 力学系 上・下, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2001 年
- [4] 柴山允瑠, ハミルトン力学系, サイエンス社 (2016).
- [5] 神戸大学集中講義資料「 $n$  体問題の周期解の変分解析」<http://yang.amp.i.kyoto-u.ac.jp/~shibayama/lecture.html>