

ケプラー問題

ILAS セミナー資料

2019年3月14日

本セミナーでは、ケプラー問題のいろいろな解法を学ぶことで、ケプラー問題に関する理解を深めると同時に、多様な数学の理論に触れる。

目次

第 1 章	ケプラー問題	5
1.1	ニュートンの運動方程式	5
1.2	ケプラー問題	7
第 2 章	第一積分を用いた解法	9
2.1	第一積分	9
2.2	ケプラー問題を解く	11
2.3	$c = 0$ の場合	13
第 3 章	複素数を用いた解法	15
3.1	\mathbb{R}^2 と \mathbb{C} の同一視	15
3.2	複素数によるケプラー問題の解法	15
3.3	ケプラーの法則の証明	17
第 4 章	速度ベクトルの軌道と幾何	21
4.1	速度ベクトルの軌道	21
4.2	ケプラーの第三法則の証明	23
4.3	球面幾何	24
4.4	双曲幾何	25
4.5	$E = 0$ の場合とまとめ	26
4.6	非ユークリッド幾何	26
4.7	平行線公理	27
第 5 章	特殊関数を用いた解法	29
5.1	ケプラー方程式	29
5.2	フーリエ級数の応用	30
5.3	u の幾何的な意味	32
5.4	x, y の関数表示	33
5.5	解が代数関数でないことの証明	35
第 6 章	変分法による解法	39
6.1	変分問題	39
6.2	最小化法	43
6.3	舞踏解 (コレオグラフィ)	44

第 7 章	発展	47
7.1	3 体問題の非可積分性	47
7.2	太陽系	48
7.3	ロケット軌道の設計	49
第 8 章	極座標と合わせて解く	53
参考文献		55

第 1 章

ケプラー問題

この章では、ニュートンの運動方程式や、惑星の運動方程式であるケプラー問題の方程式を紹介する。また、惑星の軌道に関する重要な性質であるケプラーの 3 法則を紹介する。

1.1 ニュートンの運動方程式

ニュートンの運動法則とは、質点の質量と加速度の積がその質点に働く力と等しいというものである。質量 m の質点が直線上にあり、その位置を x で表すとす。その質点に作用する力が位置 x で決まり、それを $f(x)$ で表すとすると、質点の運動は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x)$$

に従う。この式をニュートンの運動方程式という。

例として、地表近くの質点（ボールなど）の運動を考えよう。質点の質量を m 、位置を (x, y) で表し、 x は水平方向、 y は鉛直上向きの座標とする。質点は鉛直下向きに質量に比例する力 mg を受けることが知られている。 g は重力加速度と呼ばれる定数で、約 9.8m/s^2 である。したがって、この質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \quad (1.1)$$

である。この方程式を満たす x, y は積分することで、

$$x = a_1 t + a_0, \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + b_1 t + b_0 \quad (1.2)$$

と求めることができる。この x, y のように運動方程式を満たす t の関数を運動方程式の解とか軌道という。

(1.2) で、 $a_1 \neq 0$ と仮定すると、 t が消去できて

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} g \left(\frac{1}{a_1} (x - a_0) \right)^2 + b_1 \left(\frac{1}{a_1} (x - a_0) \right) + b_0 \\ &= -\frac{g}{2a_1^2} x^2 + \frac{ga_0 + b_1}{a_1} x - \frac{ga_0^2}{2a_1^2} - \frac{b_1 a_0}{a_1} + b_0 \end{aligned}$$

となり、質点は放物線を描くことが分かる。

問題 1. 地表近くでボールを速度の大きさ c , 角度 θ で投げるとする. 初期位置を原点とする. つまり, $a_0 = b_0 = 0, a_1 = c \cos \theta, b_1 = c \sin \theta$ とする. このとき, 質点が再び $y = 0$ に達したときの x がもっとも最大になるような θ は何か. (つまり, 図 1.1 のように同じ初速度でもっとも遠方に投げたければ, どのような角度が最適か.)

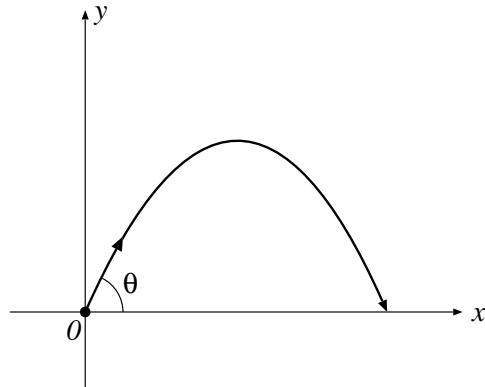


図 1.1

問題 2. 前問と同じく, 原点から質点を速度の大きさ c , 角度 θ で投げるとする. α を定数とする. このとき, 質点が直線 $y = \alpha x$ に達したときの x がもっとも最大になるような θ は何か. (つまり, 図 1.2 のように同じ初速度で斜面に向かって投げるときもっとも遠方に投げたければ, どのような角度が最適か.) また, $\alpha \rightarrow \pm\infty$ のとき, その θ の極限值を求めよ.

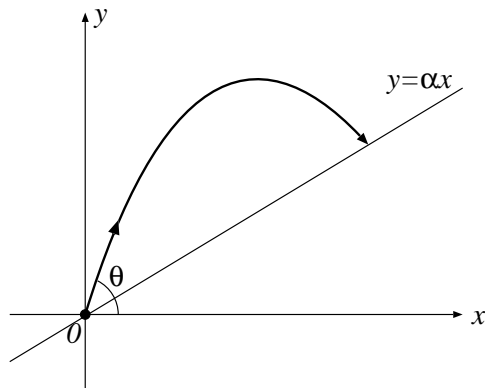


図 1.2

(1.1) は, 質点の位置の x 成分, y 成分に関してそれぞれニュートンの運動法則に基づいて得られた方程式である. 以下では, 質点の位置をベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表し, 運動方程式 (1.1) も

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

のように表す. $\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ はベクトルの各成分を t で 2 回微分したものを表す. 右辺の $\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ のように, 質点に働く力もベクトルで表す.

より一般に, 質点の質量を m , 位置を $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とし, その質点に働く力を $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{q}) \\ f_2(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$ としたとき, ニュートンの運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{q})$$

と表される. 力は質点の位置 \mathbf{q} で決まるから, \mathbf{F} の各成分は \mathbf{q} の関数 $f_1(\mathbf{q}), f_2(\mathbf{q})$ として表される.

運動方程式の x, y は t の関数であるから, $x(t), y(t)$ と書くこともある. \mathbf{q} も t に依存するから, $\mathbf{q}(t)$ と書くこともある.

空間における質点の運動を考えるときも同様である. $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{q}) \\ f_2(\mathbf{q}) \\ f_3(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$ として運動方程式は同じ形の式で表せる. $\frac{d\mathbf{q}}{dt}$ や $\dot{\mathbf{q}}$ は各成分を t で 1 回微分したベクトル, $\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2}$ や $\ddot{\mathbf{q}}$ は各成分を t で 2 回微分したベクトルを表す. 平面上のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の集合を \mathbb{R}^2 , 空間上のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の集合を \mathbb{R}^3 と表す. また, \mathbb{R} は実数全体の集合を表す.

1.2 ケプラー問題

万有引力の法則とは, 質点同士は互いの方向に引き合い, その力の大きさは引き合う物体の質量の積に比例し, 距離の 2 乗に反比例するというものである.

太陽系について, 太陽は惑星に対して非常に大きいので, 太陽は不動で, 座標の原点にあるとする. 一つの惑星の運動を考え, その惑星は太陽からだけ引力を受けるとする. 太陽の質量を M とし, その惑星の質量を m とする. 惑星の位置を $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ とすると, 惑星の運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = -\frac{mMG}{|\mathbf{q}|^3} \mathbf{q}$$

と表される. $|\mathbf{q}|$ はベクトル \mathbf{q} の大きさ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ を表す. G は万有引力定数と呼ばれる定数で, およそ $6.67259 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ である. この運動方程式の解を求める問題をケプラー問題という.

惑星の運動について, ケプラーの法則と呼ばれる以下の 3 つの法則が成立する.

第一法則 惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道を描く.

第二法則 惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に掃く面積は、一定である。

第三法則 惑星の公転周期の 2 乗は、軌道の長半径の 3 乗に比例する。

この法則から、惑星の運動はよく理解できる。次章から、ケプラー問題から 3 法則を導くいくつかの証明を紹介する。

惑星のある時刻 $t = a$ における位置 $\mathbf{q}(a)$ と速度 $\frac{d\mathbf{q}}{dt}(a)$ と原点を含む平面が存在する。惑星はその平面内を運動し続ける*1。したがって、惑星は最初から xy 平面内を動くものと仮定し、また定数部分 MG は k として、運動方程式は

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = -\frac{k}{|\mathbf{q}|^3}\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

として考えることもできる。 $|\mathbf{q}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ である。次章からは空間のケプラー問題を考えることもあるし、最初から平面上で考える場合もある。

*1 このことは、次章で示すように、角運動量が 0 でない場合は角運動量保存則から示すことができる。角運動量が 0 の場合も含む別の証明は、初期位置を初速度を定めれば解が一意に決まること (数学的には常微分方程式の解の一意性) から導かれる。もし、初期位置と初速度ベクトルが平行でなく (一次独立であり)、それらを含む平面から出れば、その平面に対する対称変換で写した曲線も同じ初期位置と初速度を満たす解になる。一方で、初期位置と初速度を満たす解はただ一つしかないことが示されており、それに矛盾する。同様に、初期位置と初速度と原点が同一直線上にあれば、その直線上を運動する。

第2章

第一積分を用いた解法

本章では、まずケプラー問題の第一積分を紹介する。エネルギーと角運動量を用いた解法はよく紹介されるが、ここではルンゲ-レンツベクトルという各成分が第一積分になるベクトルを用いてより簡明な解法を述べることにする。後の章の解法でも第一積分は必要になるが、ルンゲ-レンツベクトルを効果的に使うというのが本章の解法の特徴である。

2.1 第一積分

$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$ と置くことで、空間のケプラー問題

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = -\frac{k}{|\mathbf{q}|^3}\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$$

は

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{k}{|\mathbf{q}|^3}\mathbf{q}$$

と表すことができる。

力学の運動方程式について、各解に沿って一定になる量 (\mathbf{q}, \mathbf{p} の関数) を第一積分あるいは保存量という。ケプラー問題の第一積分はいくつか知られている。

■エネルギー

$$E = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 - \frac{k}{|\mathbf{q}|}$$

をエネルギーという。これは、第一積分である。実際、 t で微分すると、

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \frac{k}{|\mathbf{q}|^3}\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \cdot \left(-\frac{k}{|\mathbf{q}|^3}\mathbf{q}\right) + \frac{k}{|\mathbf{q}|^3}\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = 0$$

となり、 t によらず一定である*1。

*1 $|\mathbf{q}| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ であるから、

$$\frac{d|\mathbf{q}|^{-1}}{dt} = \frac{d(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{-1/2}}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{2(q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2 + q_3\dot{q}_3)}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{3/2}} = -\frac{\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}|^3}$$

となる。

■角運動量 2つの空間ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

に対し、外積あるいはベクトル積と呼ばれるベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

により定義する.

問題 3. 外積について以下が成り立つことを示せ.

1. (双線形性)

(a) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し, $(c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = c_1 \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + c_2 \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}$

(b) $d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\mathbf{a} \times (d_1 \mathbf{b}_1 + d_2 \mathbf{b}_2) = d_1 \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 + d_2 \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2$

2. (歪対称性) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. 特に, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

3. (スカラー三重積公式) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

4. (ベクトル三重積公式) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

5. (ヤコビの恒等式) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

問題 4. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は \mathbf{a}, \mathbf{b} と垂直で, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ は \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす平行四辺形の面積に等しいことを示せ.

歪対称性 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ のように外積は普通の積と異なる性質もあるので, 計算の際には注意が必要である. また, 次の問題で示すように, 結合法則も一般には成り立たない.

問題 5. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ となるベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ の例を挙げよ.

問題 6. \mathbf{f}, \mathbf{g} が独立変数 t により変化する空間ベクトルであり, それらの各成分が t で微分可能であるとき,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \frac{d\mathbf{g}}{dt}$$

が成り立つことを示せ.

ケプラー問題に戻ろう. $\mathbf{c} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ を角運動量ベクトルという. 角運動量ベクトル \mathbf{c} の各成分は第一積分である. 実際, t で微分すると,

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{q} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{p} \times \mathbf{p} + \mathbf{q} \times \left(-\frac{k}{|\mathbf{q}|^3} \mathbf{q}\right) = \mathbf{0}$$

となることから, \mathbf{c} の各成分が一定であることが分かる.

$\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ の場合を考える. 原点を通り, \mathbf{c} と垂直な平面を α とする. \mathbf{q} は \mathbf{c} と常に垂直であるから, \mathbf{q} は常に平面 α に属する.

■ルンゲ-レンツベクトル

$$\mathbf{R} = \frac{1}{k} \mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - \frac{1}{|\mathbf{q}|} \mathbf{q}$$

をルンゲ-レンツベクトルという。ルンゲ-レンツ-パウリベクトル、ラプラスベクトル、離心率ベクトルなどとも呼ばれる。

ルンゲ-レンツベクトルの各成分が第一積分であることを示そう。まず、第1項の微分を計算する。角運動量ベクトル $\mathbf{c} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ の各成分は第一積分であったことを用いると、

$$\frac{d(\mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p}))}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) + d\mathbf{p} \times \frac{d(\mathbf{q} \times \mathbf{p})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) = -\frac{k}{|\mathbf{q}|^3} \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p})$$

となる。ここで、ベクトル三重積公式より、

$$\mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{p} = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})\mathbf{q} - |\mathbf{q}|^2\mathbf{p}$$

となるので、

$$\frac{d(\mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p}))}{dt} = -\frac{k(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})}{|\mathbf{q}|^3} \mathbf{q} + \frac{k}{|\mathbf{q}|} \mathbf{p}$$

となる。

次に $\frac{1}{|\mathbf{q}|}\mathbf{q}$ の微分を計算すると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\mathbf{q}|} \mathbf{q} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\mathbf{q}|} \right) \mathbf{q} + \frac{1}{|\mathbf{q}|} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{q}|^3} \mathbf{q} + \frac{1}{|\mathbf{q}|} \mathbf{p} = -\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{q}|^3} \mathbf{q} + \frac{1}{|\mathbf{q}|} \mathbf{p}$$

となる。したがって、 $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{0}$ となり、 \mathbf{R} の各成分は一定である。

2.2 ケプラー問題を解く

$r = |\mathbf{q}|, e = |\mathbf{R}|$ とし、 \mathbf{q} と \mathbf{R} のなす角を θ とする。 $\mathbf{q} \cdot \mathbf{R} = re \cos \theta$ が成り立つ。一方、

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{q} \cdot \left(\frac{1}{k} \mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - \frac{1}{|\mathbf{q}|} \mathbf{q} \right) = \mathbf{q} \cdot \left(\frac{1}{k} \mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - \frac{1}{|\mathbf{q}|} \mathbf{q} \right) = \frac{1}{k} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p})) - \frac{1}{|\mathbf{q}|} |\mathbf{q}|^2$$

となり、第1項にスカラー三重積公式を用いると、

$$= \frac{1}{k} (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - r = \frac{1}{k} |\mathbf{c}|^2 - r$$

となる。

$$re \cos \theta = \frac{1}{k} |\mathbf{c}|^2 - r$$

を r について表すと、

$$r = \frac{a}{1 + e \cos \theta}$$

と表せる。ここで、 $a = |\mathbf{c}|^2/k$ である。

ここから、 $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ とし軌道が平面 α に属することを用いる。 \mathbf{R} も α に属することを確かめておこう。 α は \mathbf{q} と \mathbf{p} が常に乗る平面であるので、 $\mathbf{q} \times \mathbf{p}$ に垂直で原点を通るものとして特徴付けられる。 $\mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p})$ は $\mathbf{q} \times \mathbf{p}$ に垂直であり、 $\mathbf{q} \times \mathbf{p}$ は \mathbf{q} に垂直であることを用いると、

$$(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{R} = \frac{1}{k} (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p})) - \frac{1}{|\mathbf{q}|} (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} = 0$$

である。よって、 \mathbf{R} は α に属する。

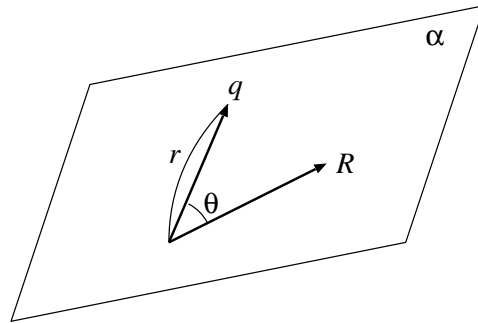


図 2.1

さて、平面 α 上で考えると、 \mathbf{R} は一定のベクトルで、 \mathbf{q} は原点からの距離が r で \mathbf{R} と角 θ をなすので、 \mathbf{R} を第一成分とする座標系の方向と見ると、 r, θ は極座標である (図 2.1).

$$r = \frac{a}{1 + e \cos \theta}$$

は円錐曲線を極座標で表示したものである。軌道が有界になるのは $0 \leq e < 1$ の場合で、このとき質点は楕円を描く。これでケプラーの第一法則が示された。

ケプラーの第二法則を示そう。軌道が xy 平面に属し、 \mathbf{R} を x 軸となるように座標をとると、 $\mathbf{q} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$ となる。 $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$ であるから、

$$\mathbf{c} = \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

となり、これは一定のベクトルであったから $r^2 \dot{\theta} = c = |\mathbf{c}|$ とおける。

時間 t_0 から t_1 の間に原点と \mathbf{q} を結ぶ線分が掃く面積は

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} r^2 \dot{\theta} dt = \frac{c}{2} (t_1 - t_0)$$

となり、一定時間に掃く面積は一定であることが分かった。

第三法則を示そう。上記のことから、周期を T とすると楕円の面積は $\frac{cT}{2}$ である。 θ と r の関係式から、楕円の長軸の長さは

$$\frac{a}{1 - e} + \frac{a}{1 + e} = \frac{2a}{1 - e^2} =: 2l$$

であり*2、原点から焦点までの距離は l の e 倍であるから短軸の長さは

$$2n = 2\sqrt{\frac{a^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{a^2 e^2}{(1 - e^2)^2}} = \frac{2a}{\sqrt{1 - e^2}}$$

である (図 2.2)。これをもとに求めた楕円の面積は

$$\pi n l = \frac{\pi a^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

*2 $A := B$ は A を B により定義することを表す

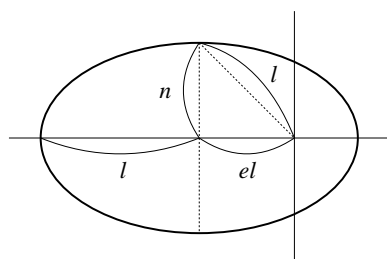


図 2.2

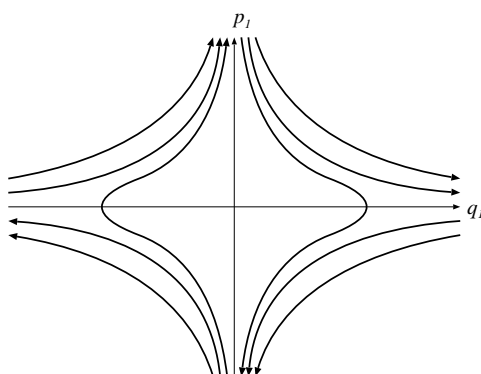


図 2.3

である。よって、

$$\frac{\pi a^2}{(1-e^2)^{3/2}} = \frac{cT}{2}$$

である。 $a = |c|^2/k = c^2/k$ であるから

$$T = \frac{2\pi a^2}{c(1-e^2)^{3/2}} = \frac{2\pi a^2}{a^{1/2}k^{1/2}(1-e^2)^{3/2}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{k^{1/2}(1-e^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{(2k)^{1/2}}(2l)^{3/2}$$

となり、これで第三法則も示された。

2.3 $c = 0$ の場合

$c = 0$ の場合は \mathbf{q} と \mathbf{p} が平行であるから、直線上を運動する。その直線が q_1 軸となるように座標をとると、エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{k}{|q_1|}$$

と表される。 E は一定であるから、 q_1, p_1 平面における E の等高線を描くと図 2.3 のようになる。解は E の値で決まる 1 つの等高線上を動き、 p_1 の正負により q_1 の増減がわかるので、それにより概ね解の挙動がわかる。

第3章

複素数を用いた解法

この章では、ポーリンによる複素数を用いたケプラー問題の解法を紹介する。運動方程式は調和振動子と同じ方程式に変換される。これにより、ケプラーの第一法則が導ける。詳しくは、[1]の付録を参照せよ。

3.1 \mathbb{R}^2 と \mathbb{C} の同一視

この章では最初から \mathbb{R}^2 上のケプラー問題を考えることにする。

$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ は実数を成分とするベクトル $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるが、これを複素数 $q = x + iy \in \mathbb{C}$ とみなして考える。 x, y が t により変化すれば複素数 q も t により変化し、 t による q の微分は

$$\frac{dq}{dt} := \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}$$

により定める。2階微分も同様に、

$$\frac{d^2q}{dt^2} := \frac{d^2x}{dt^2} + i \frac{d^2y}{dt^2}$$

とする。

問題 7. $f(t), g(t)$ を実数 t を独立変数とし複素数をとる関数とし、その実部、虚部が微分可能であるとする。また、 c は複素数の定数である。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}}{dt} &= \overline{\frac{df}{dt}} & \frac{d(cf)}{dt} &= c \frac{df}{dt} & \frac{d(f+g)}{dt} &= \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt} \\ \frac{d(fg)}{dt} &= \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt} & \frac{d}{dt} \left(\frac{f}{g} \right) &= \frac{\frac{df}{dt}g - f\frac{dg}{dt}}{g^2} \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ。ただし、最後の式は $g(t) \neq 0$ のとき成り立つ式である。

3.2 複素数によるケプラー問題の解法

複素数 q の絶対値は $|q| = \sqrt{x^2 + y^2}$ であったから、方程式

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{kq}{|q|^3} \tag{3.1}$$

はケプラー問題と本質的に同じ問題である。

$$p = \frac{dq}{dt} \text{ とし,} \quad \frac{dq}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{kq}{|q|^3} \quad (3.2)$$

とする。2.1 節で示した通り，エネルギー

$$E = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{k}{|q|}$$

は保存される。

さて，ここで天下りのではあるが $q = \frac{1}{2}z^2, p = \frac{w}{z}$ *1 とおくと，(3.2) の第一式は

$$\frac{dq}{dt} = z \frac{dz}{dt} = p = \frac{w}{z}$$

となるので，

$$\frac{dz}{dt} = \frac{w}{|z|^2}$$

となる。第2式は

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\frac{dw}{dt} \bar{z} - w \frac{d\bar{z}}{dt}}{\bar{z}^2} = -\frac{k}{|q|^3} q = -\frac{kz^2}{|z|^6} \\ \frac{dw}{dt} \bar{z} - w \frac{d\bar{z}}{dt} &= -\frac{4k|z|^4}{|z|^6} \\ \frac{dw}{dt} \bar{z} - w \frac{\bar{w}}{|z|^2} &= -\frac{4k}{|z|^4} \\ \frac{dw}{dt} \bar{z} &= \frac{|w|^2}{|z|^2} - \frac{4k}{|z|^2} \\ \frac{dw}{dt} &= \left(\frac{|w|^2}{|z|^4} - \frac{4k}{|z|^4} \right) z \end{aligned}$$

となる。ここで，

$$E = \frac{|p|^2}{2} - \frac{k}{|q|} = \frac{|w|^2}{2|z|^2} - \frac{2k}{|z|^2}$$

であるから

$$\frac{dz}{dt} = \frac{w}{|z|^2}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{2Ez}{|z|^2} \quad (3.3)$$

と表される。 $z(t)$ を (3.3) を満たすとし， $\tau = \int \frac{1}{|z(t)|^2} dt$ により t から τ 変換すると*2，

$$\frac{dz}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{w}{|z|^2}, \quad \frac{dw}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{2Ez}{|z|^2}$$

より，

$$\frac{dz}{d\tau} = w, \quad \frac{dw}{d\tau} = 2Ez$$

*1 力学の運動方程式では勝手に作った変換よりも正準変換という性質を持つ変換の方が色々良い構造を保つことが分かっている。これは，正準変換の中でも特別な点変換というものになっており， $q = \frac{1}{2}z^2$ をこのように決めたことで， $p = \frac{w}{z}$ は自動的に決まる。詳しくは，[10] を参照されたい。なお，一般の中心場力では $q = cz^l$ による点変換で変換すると別の中心場力になる。ケプラー問題の場合はちょうど調和振動子に変換されたということである。詳しくは，[1] の付録を参照されたい。

*2 (3.3) はまだ解いていないのに，解 $z(t)$ を用いるのは奇異に思うかもしれない。しかし，解けていなくても常微分方程式の解の存在は保障されており，そのことから $z(t)$ はどのような関数かは分かっていなくても，(3.3) を満たすような関数として存在するので解法に利用することができる。

となる.

$z = \xi + i\eta$ とすると,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 2E\xi, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 2E\eta \quad (3.4)$$

となり, $E < 0$ のときこれらはそれぞれバネ振動の運動方程式と同じである. 解は

$$\xi = a_1 \cos(\sqrt{-2E}\tau) + b_1 \sin(\sqrt{-2E}\tau), \eta = a_2 \cos(\sqrt{-2E}\tau) + b_2 \sin(\sqrt{-2E}\tau) \quad (3.5)$$

と表せる.

3.3 ケプラーの法則の証明

(3.5) はベクトルで表すと

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \cos(\sqrt{-2E}\tau) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \sin(\sqrt{-2E}\tau) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

となる. $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ の場合, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ は平行になるので (ξ, η) が描く軌道は直線になり, 衝突することが分かる. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ の場合を考えよう.

$$\cos(\sqrt{-2E}\tau) = \frac{b_2\xi - b_1\eta}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad \sin(\sqrt{-2E}\tau) = \frac{-a_2\xi + a_1\eta}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

となるので,

$$\left(\frac{b_2\xi - b_1\eta}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)^2 + \left(\frac{-a_2\xi + a_1\eta}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)^2 = 1$$

が成り立つ. これは, 整理すると

$$\frac{(a_2^2 + b_2^2)\xi^2 - 2(a_1a_2 + b_1b_2)\xi\eta + (a_1^2 + b_1^2)\eta^2}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} = 1$$

となる.

これは楕円を描き, 座標系を回転させることで

$$\frac{\xi^2}{K^2} + \frac{\eta^2}{L^2} = 1, (0 < L \leq K) \quad (3.6)$$

として良い*3.

$$q = x + iy = \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}(\xi + i\eta)^2$$

であったから, $x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), y = \xi\eta$ である. これより,

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(\xi^4 - 2\xi^2\eta^2 + \eta^4) + \xi^2\eta^2 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)^2$$

*3 $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$ の形の式を 2 次形式という. 2 次形式は直交行列 P による変換 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} =$

$P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ で $\alpha\xi^2 + \beta\eta^2$ の形にできる. α, β の正負は行列 $T = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ の固有値である.

$\text{Tr}(T) := A + C > 0, \det T = AC - B^2 > 0$ であれば α, β は共に正である. 直交行列 P は座標の原点を中心とする回転行列や原点を通る直線に関する反転で表せる. これらのことは線形代数の後半で学ぶので, 今は読み飛ばして良い.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

であるから,

$$\xi^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x, \quad \eta^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$$

となる. よって, (3.6) は

$$\frac{1}{K^2}(\sqrt{x^2 + y^2} + x) + \frac{1}{L^2}(\sqrt{x^2 + y^2} - x) = 1$$

となる. これは整理すると

$$\frac{4^2}{(L^2 + K^2)^2} \left(x - \frac{K^2 - L^2}{4} \right)^2 + \frac{4}{L^2 K^2} y^2 = 1$$

と表せる. 長軸 $\frac{L^2 + K^2}{2}$, 短軸 LK である. 中心から焦点までの距離は

$$\sqrt{\frac{(L^2 + K^2)^2}{4^2} - \frac{L^2 K^2}{4}} = \frac{K^2 - L^2}{4}$$

であるから, 原点が焦点の1つになっている. これで, ケプラーの第一法則が示された.

第2法則を示そう. 時間 t_0 から t_1 の間に掃く面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dy}{dt} x - \frac{dx}{dt} y dt &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \text{Im}(\bar{q}p) dt = \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_1} \text{Im}(\bar{z}w) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_1} \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_1} L \cos(\sqrt{-2E}\tau) K \sqrt{-2E} \cos(\sqrt{-2E}s) \\ &\quad - L \sin(\sqrt{-2E}\tau) (-K \sqrt{-2E} \sin(\sqrt{-2E}s)) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_1} LK \sqrt{-2E} dt \\ &= \frac{1}{4} LK \sqrt{-2E} (t_1 - t_0) \end{aligned}$$

となり, 第2法則が示された.

第3法則を示そう. 得られた楕円の式

$$\frac{16}{(L^2 + K^2)^2} \left(x - \frac{L^2 - K^2}{4} \right)^2 + \frac{4}{L^2 K^2} y^2 = 1$$

から長軸の長さは $l := \frac{L^2 + K^2}{4}$ である. 周期を求めよう.

元の座標で1周期は, ボーリンの座標では楕円の半分を描く時間に相当するから, 時間パラメータ s での周期は $S := \frac{\pi}{\sqrt{-2E}}$ である. 元の時間パラメータ t での周期 T は

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T 1 dt = \int_0^S \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_0^S |\xi|^2 d\tau = \int_0^S L^2 \cos^2(\sqrt{-2E}\tau) + K^2 \sin^2(\sqrt{-2E}\tau) d\tau \\ &= \int_0^S \frac{L^2 + K^2}{2} + \frac{L^2 - K^2}{2} \cos(2\sqrt{-2E}\tau) d\tau = \frac{L^2 + K^2}{2} S + \frac{L^2 - K^2}{4\sqrt{-2E}} [\sin(2\sqrt{-2E}\tau)]_0^S \\ &= \frac{\pi(L^2 + K^2)}{2\sqrt{-2E}} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\Gamma := \frac{|w|^2}{2} - 2k - E|z|^2 = 0$ より、

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{2}(L^2(-2E)\sin^2(\sqrt{-2E}\tau) + K^2(-2E)\cos^2(\sqrt{-2E}\tau)) - 2k - E(L^2\cos^2(\sqrt{-2E}s) + K^2\sin^2(\sqrt{-2E}s)) \\ &= -E(L^2 + K^2) - 2k = 0\end{aligned}$$

となり

$$L^2 + K^2 = \frac{2k}{-E}$$

が得られる。よって、長軸の長さは

$$l = \frac{L^2 + K^2}{4} = \frac{k}{-2E}$$

で周期は

$$T = \frac{\pi(L^2 + K^2)}{2\sqrt{-2E}} = 2\pi k^{-1/2}l^{3/2}$$

となり第3法則も示された。

参考 1. ケプラー問題の方程式 (3.1) では、 $q = 0$ で右辺は発散し、方程式は意味を持たなくなる。このような点を特異点という。この章で行った変換を振り返ると、 $q = \frac{1}{2}z^2$ であるから、特異点に対応する点は $z = 0$ になる。さらに $z = \xi + i\eta$ と表したから、 $\xi = \eta = 0$ が元の方程式の特異点に対応する点になる。ところが変換後の微分方程式 (3.4) では、その点は特異点ではない。(3.4) は $(\xi, \eta) = (0, 0)$ でも意味を持つし、解がこの点に達しても、さらに解として意味を持つ。このように特異点であった点を特異点でなくすことを正則化とかブローアップ*4という。この章で与えた変換は、ケプラー問題の解法になっていると同時に、特異点の正則化にもなっている。

*4 微分方程式論では解が有限時間で無限大に発散するという別の現象をブローアップ (爆発) ということもあるので、注意が必要である。

第4章

速度ベクトルの軌道と幾何

ケプラーは、当初惑星の軌道が太陽を中心とする円とは限らないことに気づいていた。そして、惑星の軌道は円であるが、中心は必ずしも太陽でないと予想した。その後、それは間違いで、太陽を焦点とする楕円あることに気づいたわけだが、その当初の予想は速度ベクトルに関しては正しいことがのちにハミルトンにより証明された。この章ではその証明を与え、それをもとにケプラーの法則を導く。

4.1 速度ベクトルの軌道

平面上のケプラー問題

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = -\frac{k}{|\mathbf{q}|^3} \mathbf{q} \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$$

を考える。 $\mathbf{q} = r(\cos \theta, \sin \theta)$ とし、 $\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$ とすると

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{k}{r^2}(\cos \theta, \sin \theta)$$

となる。

第2章で述べたことの繰り返しになるが、角運動量は

$$q_1 p_2 - q_2 p_1 = r \cos \theta (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) - r \sin \theta (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) = r^2 \dot{\theta}$$

と表せて、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q_1 p_2 - q_2 p_1) &= \dot{q}_1 p_2 + q_1 \dot{p}_2 - \dot{q}_2 p_1 - q_2 \dot{p}_1 \\ &= p_1 p_2 + q_1 \left(-\frac{k q_2}{|\mathbf{q}|^3} \right) - p_2 p_1 - q_2 \left(-\frac{k q_1}{|\mathbf{q}|^3} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので、 $r^2 \dot{\theta}$ は一定である。この値を c とし、 $c \neq 0$ の場合を考える。独立変数 t を θ に変換すると、

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\theta} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{k}{r^2}(\cos \theta, \sin \theta) \frac{r^2}{c} = -R(\cos \theta, \sin \theta)$$

となる*1。ここで、 $R = k/c$ である。 θ で積分して、

$$\mathbf{p} = R(-\sin \theta, \cos \theta) + \mathbf{b}$$

*1 3.2節の脚注で述べた考え方を適用している

となる。 \mathbf{b} は一定のベクトルである。これで、 \mathbf{p} が \mathbf{b} を中心とし、半径 R の円またはその一部を描くことが分かった。この円を C とする。 C は \mathbf{p} が動く範囲だけでなく、 \mathbf{b} を中心とする半径 R の円全体を表す。 \mathbf{p} の軌道は C 全体か C の一部を描く。

$e = \frac{|\mathbf{b}|}{R}$ とおく。 \mathbf{q} の座標系を回転させると、 \mathbf{p} の座標系も同じだけ回転されるので、 \mathbf{b} が y 軸上にくるように回転させる。すると、

$$\mathbf{p} = R(-\sin \theta, e + \cos \theta)$$

と表せる。

角運動量は

$$c = q_1 p_2 - q_2 p_1 = r \cos \theta R(e + \cos \theta) - r \sin \theta (-R \sin \theta) = rR(1 + e \cos \theta)$$

と表せる。

$$r = \frac{c}{R(1 + e \cos \theta)}$$

となり、軌道が円錐曲線になるという事実が導かれた。特に、軌道が有界になるのは $0 \leq e < 1$ の場合で、楕円になる。これで、第一法則が示せた。

なお、 $1 + e \cos \theta > 0$ であるから、 $0 \leq e < 1$ のときは θ は全ての実数をとるので、 \mathbf{p} は円を描くが、 $e \geq 1$ のときは θ は $\cos \theta > -e^{-1}$ を満たす範囲だけ動くので \mathbf{p} は円 C の一部のみを描く。原点から C への接線との交点はその境界になる (図 4.1)。実際、境界と

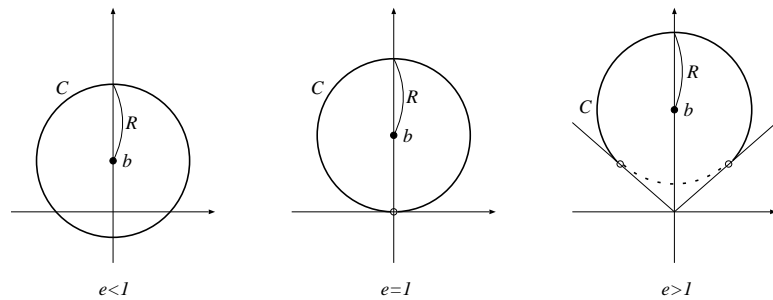


図 4.1

なる点は $\cos \theta_0 = -e^{-1}$ となる θ_0 で、 $R(-\sin \theta_0, e + \cos \theta_0)$ と表される。この点における C の接ベクトルは $R(-\cos \theta_0, -\sin \theta_0)$ であるから、接線は

$$R(-\sin \theta_0, e + \cos \theta_0) + Rs(-\cos \theta_0, -\sin \theta_0)$$

と表される。これに、 $s = -\tan \theta_0$ を代入すると

$$\begin{aligned} & R(-\sin \theta_0, e + \cos \theta_0) - R \tan \theta_0 (-\cos \theta_0, -\sin \theta_0) \\ &= R(-\sin \theta_0, e + \cos \theta_0) - R \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} (-\cos \theta_0, -\sin \theta_0) \\ &= R(-\sin \theta_0, e + \cos \theta_0) + R \left(\sin \theta_0, \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right) \\ &= R(-\sin \theta_0, e - e^{-1}) + R \left(\sin \theta_0, \frac{1 - e^{-2}}{-e^{-1}} \right) = (0, 0) \end{aligned}$$

となり、原点を通ることが分かった。

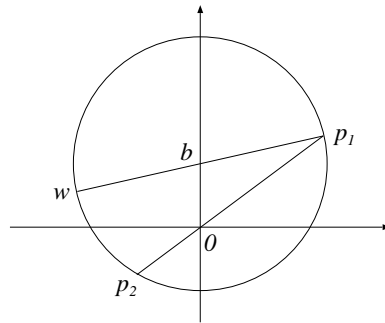


図 4.2

エネルギー E と R, e の関係を調べておこう.

$$\begin{aligned} 2E &= |\mathbf{p}|^2 - \frac{2k}{r} = R^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2R\mathbf{b} \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) - \frac{2k}{r} \\ &= R^2 + |(0, Re)|^2 + 2R(0, Re) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) - \frac{2kR(1 + e\cos\theta)}{c} \\ &= R^2 + R^2e^2 + 2R^2e\cos\theta - 2R^2(1 + e\cos\theta) = R^2e^2 - R^2 \end{aligned}$$

となる. よって, $E < 0$ なら $0 \leq e < 1$ である.

命題 1. \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 が C 上の異なる点とし, \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 と原点は同一直線上にあると仮定する. このとき, $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = |\mathbf{b}|^2 - R^2 = 2E$ が成り立つ.

証明. \mathbf{w} を, C 上の点で, 円 C の中心 \mathbf{b} に対し \mathbf{p}_1 と正反対の位置にあるものとする (図 4.2). $\mathbf{p}_1 - \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{w}$ であるからこれを \mathbf{d} とおく. $|\mathbf{d}| = R$ である.

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{b} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{d}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{d}|^2 = |\mathbf{b}|^2 - R^2 = R^2e^2 - R^2 = 2E$$

が成り立つ. $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{w}$ は直角三角形なので, $\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{w}) = 0$ である. よって, $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{w} = 2E$ である. \square

4.2 ケプラーの第三法則の証明

第一法則は前節で示した. 第二法則は, 角運動量保存そのものだから, これも示した. ケプラーの第三法則を示そう.

$0 \leq e < 1$ のとき, \mathbf{q} の描く楕円の長軸の長さを $2l$ とすると

$$2l = \frac{c}{R(1-e)} + \frac{c}{R(1+e)} = \frac{2c}{R(1-e^2)} = \frac{2c^2}{k(1-e^2)} = -\frac{k}{E}$$

となり, よって

$$2E = -\frac{k}{l}$$

である. 短軸の長さを $2n$ とする. q_2 が極値をとるのは $\frac{dq_2}{dt} = R(e + \cos\theta) = 0$ となる点に対応する. この θ のとき $\cos\theta = -e$ であるから

$$q_2 = r \sin\theta = \pm \frac{c\sqrt{1-\cos^2\theta}}{R(1+e\cos\theta)} = \pm \frac{c\sqrt{1-e^2}}{R(1-e^2)} = \pm \frac{c}{R\sqrt{1-e^2}} = \pm \frac{k}{R\sqrt{-2E}}$$

となるので,

$$2n = \frac{2k}{R\sqrt{-2E}}$$

となる. よって, 楕円の面積は

$$\pi ln = -\frac{\pi k}{2E} \frac{k}{R\sqrt{-2E}} = \frac{\pi k^2}{R(-2E)^{3/2}}$$

である. 一方, この面積は次のように角運動量を用いても計算できる. 周期を T とすると,

$$\pi ln = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^T r^2 \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_0^T c dt = \frac{cT}{2}$$

となる. よって,

$$T = \frac{2\pi k^2}{cR(-2E)^{3/2}} = \frac{2\pi k}{(-2E)^{3/2}} = \frac{2\pi kl^{3/2}}{k^{3/2}} = \frac{\pi(2l)^{3/2}}{(2k)^{1/2}}$$

となり, ケプラーの第三法則が示された.

4.3 球面幾何

\mathbb{S}^2 を \mathbb{R}^3 における原点を中心とした単位球面とする. つまり,

$$\mathbb{S}^2 = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1\}$$

である. $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^2 (\mathbf{u} \neq (0, 0, 1))$ に対して, $\mathbf{p} = (u_1, u_2, 0)/(1 - u_3)$ とする. \mathbf{p} は \mathbf{u} と \mathbb{S}^2 の北極 $(0, 0, 1)$ を結ぶ直線と xy 平面の交点である (図 4.3). 逆に, \mathbb{R}^3 における xy 平面

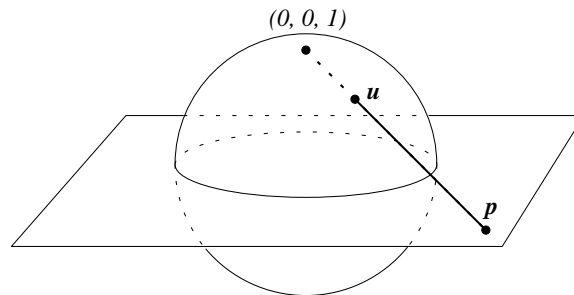


図 4.3

上の各点 \mathbf{p} に対して, \mathbf{p} と北極 $(0, 0, 1)$ を結ぶ直線が \mathbb{S}^2 と交わる点 \mathbf{u} をとることで逆の対応も得られる. \mathbb{R}^3 の xy 平面は \mathbb{R}^2 と同一視して, 北極以外の \mathbb{S}^2 の点 \mathbf{u} と \mathbb{R}^2 の点 \mathbf{p} の関係を見てみよう.

問題 8. 北極以外の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{S}^2$ が $\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_1$ の関係にあることと対応する $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^2$ が $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1/|\mathbf{p}_1|^2$ を満たすことは同値であることを示せ.

\mathbb{S}^2 上の 2 点 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ が $\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_1$ を満たすとき, \mathbf{u}_2 は \mathbf{u}_1 の対蹠点 (たいせきてん, たいしよてん) であるという.

問題 9. \mathbb{S}^2 上の円は \mathbb{R}^2 上の円か直線に対応することを示せ. ここで, \mathbb{S}^2 上の円とは \mathbb{S}^2 と (原点を通るとは限らない) 平面の交わりを表す.

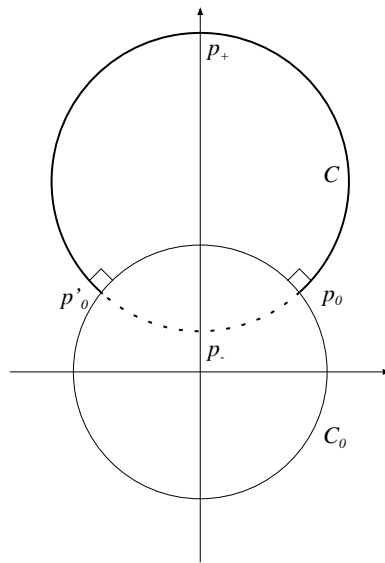


図 4.4

ケプラー問題の速度ベクトルの軌道 C を上の対応により \mathbb{S}^2 に移す. $E = -\frac{1}{2}$ の場合を考える. C を \mathbb{S}^2 上に移すと円になる. C 上の異なる 2 点 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を, 原点とこの 2 点は同一直線上にあるようにとる. \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 は平行だから $\mathbf{p}_2 = c\mathbf{p}_1$ と表せて, 命題 1 より $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = -1$ を満たすから $c|\mathbf{p}_1|^2 = -1$ である. よって, $\mathbf{p}_2 = -\frac{1}{|\mathbf{p}_1|^2}\mathbf{p}_1$ が成り立つ. これらの点に対応する \mathbb{S}^2 上の点 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ は $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2$ を満たす. よって, \mathbb{S}^2 上の円は大円 (\mathbb{S}^2 と原点を通る平面の交わり) になる.

ここでは $E = -\frac{1}{2}$ の場合を考えたが, $E < 0$ であれば球面の半径を変えれば同様に C の像は大円になる. つまり, $E < 0$ の場合, 速度ベクトルの軌道は変換により \mathbb{S}^2 上の大円に移される.

4.4 双曲幾何

次に, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ に $\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{p}|^2}\mathbf{p}$ に移す対応を考える. これは, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ を前節の対応により \mathbb{S}^2 の点 \mathbf{u} に移し, その対蹠点 $-\mathbf{u}$ に対応する点 $-\frac{1}{|\mathbf{p}|^2}\mathbf{p}$ を考え, それを -1 倍ものが \mathbf{w} である. これらの変換で円 (あるいは直線) は円 (あるいは直線) に移されるので, \mathbf{p} から \mathbf{w} への変換で円 (あるいは直線) は円 (あるいは直線) に移る.

$E = \frac{1}{2}$ とし, 速度ベクトルの軌道を考えよう. $|\mathbf{p}|^2 = 2E + \frac{k}{|q|} > 2E = 1$ である. $\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{p}|^2}\mathbf{p}$ とおくと $|\mathbf{w}| < 1$ である. つまり, \mathbf{w} は原点を中心とする単位円の内側にある. $t \rightarrow \pm\infty$ で $|q| \rightarrow \infty$ であるから, $|\mathbf{p}| \rightarrow 1$ となる. つまり, \mathbf{p} の軌道は円 C の原点を中心とする単位円 C_0 の外側部分になる. C と C_0 の交点を $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}'_0$ とする. 4.1 節で示したように, $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}'_0$ における C の接線は原点を通るのであったから, C と C_0 は直交する.

また, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{p}|^2}\mathbf{p}$ で $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}'_0$ は不変である. $\mathbf{p}_\pm = R(0, e \pm 1)$ とおく. C の y 成分が最大最小となる点である (図 4.4). いま $R^2(e^2 - 1) = 2E = 1$ であるから, \mathbf{p}_+ を

$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{p}|^2} \mathbf{p}$ で変換すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{p}_+|^2} \mathbf{p}_+ &= \frac{1}{R^2(e+1)^2} R(0, e+1) = \frac{1}{R(e+1)} (0, 1) = \frac{R(e-1)}{R(e+1)R(e-1)} (0, 1) \\ &= R(e-1)(0, 1) = \mathbf{p}_- \end{aligned}$$

となる. よって, \mathbf{p} の軌道 (円 C の C_0 の外側部分) を変換で写すと, 円 C の C_0 の内側部分になる. よって, 対応する曲線は C_0 内の円弧で C_0 と垂直に交わるものである.

ここで, 平面を複素平面 \mathbb{C} と同一視しよう. $z \mapsto \frac{i(1+z)}{1-z}$ により C_0 の内部は上半平面

$$\mathbb{H} = \{x + iy \mid y > 0\}$$

に移される. C_0 内の C_0 に直交する円弧たちは実軸に直交する半円たちに移される.

この場合も, $E = \frac{1}{2}$ について述べたが, $E > 0$ ならば円の半径を変えることにより, 同じく速度ベクトルの軌道は上半平面において横軸と直交する上半円になる.

4.5 $E = 0$ の場合とまとめ

残る $E = 0$ の場合について考えよう. この場合, C は原点を通る. よって, $\mathbf{p} \rightarrow \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2}$ によりこれは平面上の直線に移る.

速度ベクトルの軌道についてまとめると, それぞれ変換することにより, $E < 0$ の場合は \mathbb{S}^2 上の大円, $E = 0$ の場合は \mathbb{R}^2 上の直線, $E > 0$ の場合は単位円 C_0 内の半円で円 C_0 に直交するもの, あるいは上半平面 \mathbb{H} 内の半円で横軸に直交するものになる (図 4.5).

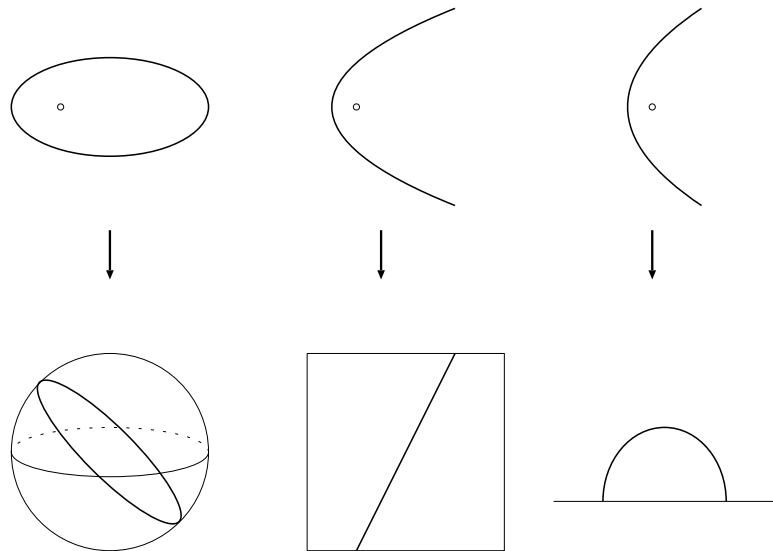


図 4.5

4.6 非ユークリッド幾何

図 4.5 の下の 3 つのタイプの曲線は, 直線概念を一般化した測地線というものになっている. 直線を特徴付ける性質として, その上の任意の 2 点に対してそれらを結ぶ最短の

曲線はその2点を結ぶ線分になり、もとの直線の一部であることである。この考え方をもとに、平面や曲面にある長さの測り方を定めたときに、2点を結ぶ最短線たちを滑らかに繋げたものを測地線という。 \mathbb{S}^2 上の大円は \mathbb{S}^2 上に沿って測った距離に関して、 \mathbb{S}^2 上の2点を結ぶ最短の曲線を考えると大円の一部になることが分かる。このことから、 \mathbb{S}^2 上の測地線は大円になる。

\mathbb{R}^2 の通常の距離 (ユークリッド距離) に関して測地線は直線になる。なお、 \mathbb{R}^2 の曲線 $(x(t), y(t)) (0 \leq t \leq 1)$ の長さは

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

で与えられるのであった。

また、Ⅲ にポアンカレ計量という特別な距離に相当する概念を導入する。 \mathbb{R}^2 の曲線 $(x(t), y(t)) (0 \leq t \leq 1)$ の長さを

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)} dt$$

で定めることにする。この測り方で考えると、測地線は横軸に直交する半円か横軸に直交する半直線になる。これらの3つの幾何は定曲率の曲面というものの代表例である。曲率や測地線に関しては、[7]などを参照されたい。力学の運動方程式が測地線として捉えることができる理由が知りたければ、[2]の45節を参照せよ。また、特にケプラー問題の場合については、[8]に説明がある。

4.7 平行線公理

この辺りの幾何学に少し触れておこう。紀元前に書かれたユークリッド原論の幾何学は5つの公理(公準)を正しいと認めた上で、それらから論理的に多くの定理を証明している。

例えば、「任意の2点をとったとき、それらを結ぶ直線が存在する」とかいう直感的に自明なものである。その公理の5番目(と同値な公理)は、「直線 l とその上になり1点 P をとったとき、 P を通り l に平行な直線はただ一つである」というもので、平行線公理と呼ばれる。ここで、2直線が平行とは、それらが共有点を持たないことを指す。公理は証明なしに正しいと認めるものであるので、理論体系としてはできるだけ少ない公理で同じ理論が確立できればその方が良い。平行線公理は他の公理を用いて証明できるのではと考えられたが、その証明の試みは全て失敗した。19世紀に入り、ロバチェフスキーらがユークリッド幾何とは異なる幾何学を構築し、平行線公理は他の公理を用いて証明することができないことを証明した。例えば、上に挙げたⅢの測地線(x 軸に垂直に交わる円か直線)をユークリッド幾何学という直線に当てはめると公理1~4は満たすが、公理5は満たさない。実際に、測地線 l と点 P を固定したときに、点 P を通り l と共有点を持たない測地線は無限に存在する(図4.6)。このような幾何学を矛盾なく構築できるということは、公理1~4から公理5を証明することができないことを示している。なぜなら、公理1~4から公理5を証明できるのであれば、Ⅲの幾何でも証明できなければならないが、実際に公理5は成立しないので証明できるはずがないということである。

なお、球面幾何でも公理5は成り立たないが、公理1~4にも成り立たないものがある

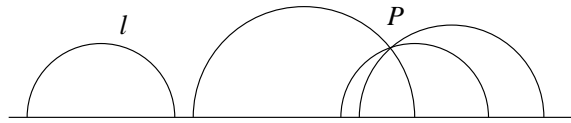


図 4.6

ので，平行線公理の証明不可能性の証明には不十分である．双曲幾何学に関しては [4]，歴史に関しては [9] などを参照されたい．

第 5 章

特殊関数を用いた解法

ここでは、ベッセル関数と呼ばれる特殊関数を用いて惑星の位置を t の関数として表示することを試みる。より詳しくは、[13, 15]などを参照されたい。

5.1 ケプラー方程式

平面上のケプラー問題を考える。 $\mathbf{q} = r(\cos \theta, \sin \theta)$ とおく。

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{r}(\cos \theta, \sin \theta) + r\dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta)$$

であるから、 $|\dot{\mathbf{q}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ である。

$$E = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{q}}|^2 - \frac{k}{|\mathbf{q}|} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}$$

角運動量 $c = r^2\dot{\theta}$ は一定であるから

$$E = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r}$$

となる。 \dot{r}^2 に関して表すと

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = 2E + \frac{2k}{r} - \frac{c^2}{r^2} = \frac{2Er^2 + 2kr - c^2}{r^2}$$

となる。この右辺の分子は r の 2 次式である。 $E < 0$ の場合を考え、この 2 次式が根を持つように

$$k^2 + 2Ec^2 \geq 0$$

であると仮定する。この仮定が満たされない場合は、右辺が正になることがないので、上式を満たすような $r(t)$ は存在しなくなる。 $2Er^2 + 2kr - c^2$ の根を $r_1, r_2 (0 < r_1 \leq r_2)$ とすると、上式は

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{-2E(r - r_1)(r_2 - r)}{r^2} \quad (5.1)$$

となる。

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}$$

とおくと

$$r_1 = a(1 - e), \quad r_2 = a(1 + e)$$

と表すことができる. r のとる範囲は $[r_1, r_2] = [a(1-e), a(1+e)]$ であるから,

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (5.2)$$

により r を u に変換すると,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{du}{dt} \frac{dr}{du} = ae \sin u \frac{du}{dt}$$

となる. すると, (5.1) は

$$\begin{aligned} a^2 e^2 \sin^2 u \left(\frac{du}{dt} \right)^2 &= \frac{-2E(a(1 - e \cos u) - a(1 - e))(a(1 + e) - a(1 - e \cos u))}{a^2(1 - e \cos u)^2} \\ a^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 &= \frac{-2E}{(1 - e \cos u)^2} \\ \frac{du}{dt} &= \pm \frac{\sqrt{-2E}}{a(1 - e \cos u)} \\ (1 - e \cos u) \frac{du}{dt} &= \pm \frac{\sqrt{-2E}}{a} \end{aligned}$$

となる. これを, t で積分すると,

$$\begin{aligned} \int (1 - e \cos u) \frac{du}{dt} dt &= \int \pm \frac{\sqrt{-2E}}{a} dt \\ \int (1 - e \cos u) du &= \pm \frac{\sqrt{-2E}}{a} (t - t_0) \\ u - e \sin u &= \pm \frac{\sqrt{-2E}}{a} (t - t_0) \end{aligned}$$

となる. これを解いて u を t の関数として表したい. 簡単のため, $l = \pm \frac{\sqrt{-2E}}{a} (t - t_0)$ とし,

$$u - e \sin u = l \quad (5.3)$$

の形の方程式を考え, u を l の関数 $u(l)$ として求めよう. この方程式をケプラー方程式という.

5.2 フーリエ級数の応用

l について u は単調増加で, l が 2π 増えると u も 2π 増える. つまり,

$$u(l + 2\pi) = u(l) + 2\pi$$

が成り立つ. $v(l) = u(l) - l = e \sin u(l)$ とおくと,

$$v(l + 2\pi) = u(l + 2\pi) - (l + 2\pi) = (u(l) + 2\pi) - (l + 2\pi) = u(l) - l = v(l)$$

となる.

$f(x + 2\pi) = f(x)$ を満たすような関数の例として, $\sin kx, \cos kx$ や定数がある. またこれらの定数倍の和

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

もそのような関数の例である. 以下の定理のように, さらにこの和を無限和にすると $f(x + 2\pi) = f(x)$ を満たすような関数は全て表現できることが知られている.

定理 1. (フーリエ級数展開) 関数 $f(x)$ は微分可能で導関数 $f'(x)$ も連続で, $f(x+2\pi) = f(x)$ を満たすとする.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

とおく. このとき,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

が成り立つ. この収束は一様収束である*1.

この定理の級数をフーリエ級数といい, a_k, b_k をフーリエ係数という.

これを, $v(l)$ に適用しよう. (5.3) で l を $-l$ にすると u が $-u$ になる. つまり, $v(-l) = -v(l)$ となり v は奇関数である. すると, フーリエ係数 a_k を定める式

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(l) \cos kldl = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 v(l) \cos kldl + \int_0^{\pi} v(l) \cos kldl \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\pi}^0 v(-l) \cos(-kl)(-1)dl + \int_0^{\pi} v(l) \cos kldl \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(- \int_0^{\pi} v(l) \cos kldl + \int_0^{\pi} v(l) \cos kldl \right) = 0 \end{aligned}$$

となる. よって,

$$v(l) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kl$$

と表すことができる. フーリエ係数 b_k は

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(l) \sin kldl = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(l) \sin kldl$$

となる. 部分積分の公式より

$$b_k = \left[-\frac{2}{\pi k} v(l) \cos kl \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \frac{dv}{dl}(l) \cos kldl$$

となる. v は奇関数であったことから $v(\pi) = -v(-\pi)$ で, 周期性より $v(-\pi) = v(-\pi + 2\pi) = v(\pi)$ でもあるから $v(\pi) = v(-\pi) = 0$ である. よって,

$$b_k = \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \frac{dv}{dl}(l) \cos kldl$$

*1 一様収束の概念をまだ学んでいない学生は, いずれ微積分学や数学基礎などで学ぶのでこの部分は気にしなくて良いが, 一応説明しておく. I を区間とする. 関数の列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に I 上で各点収束するとは, 任意の $x \in I$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, N が存在して $n \geq N$ ならば $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つことをいう. このとき N は x と ε に依存して定まる. 関数の列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に I 上で一様収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, N が存在して $n \geq N$ ならば任意の $x \in I$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つことをいう. このとき N は ε のみに依存して定まり, $x \in I$ にはよらずに取れる. 一様収束なら各点収束することが言えるが, 逆は一般には正しくない.

である. u は l について単調増加で $u(0) = 0, u(\pi) = \pi$ であることを用いて置換積分する.

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi k} \int_0^\pi \left(\frac{du}{dl}(l) - 1 \right) \cos kldl \\ &= \frac{2}{\pi k} \int_0^\pi \frac{du}{dl}(l) \cos kldl - \frac{2}{\pi k} \int_0^\pi \cos kldl \\ &= \frac{2}{\pi k} \int_0^\pi \cos kldu - \frac{2}{\pi k^2} [\sin kl]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi k} \int_0^\pi \cos k(u - e \sin u) du \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(mx - z \sin x) dx$$

と定義する. $J_m(z)$ はベッセル関数と呼ばれるものである. ベッセル関数を用いると

$$b_k = \frac{2}{k} J_k(ke)$$

と表すことができる.

これにより,

$$u = l + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kl \quad (5.4)$$

と表すことができる.

ベッセル関数のテイラー展開表示は

$$J_m(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!(m+k)!}$$

となることが知られている. $l = \pm \frac{\sqrt{-2E}}{a} (t - t_0)$ であったから, $r = a(1 - e \cos u)$ により r も t の関数として表現できたことになる.

5.3 u の幾何的な意味

楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \quad (5.5)$$

を考える. $x = a \cos u, y = a\sqrt{1-e^2} \sin u$ により媒介変数表示できる. u は楕円を短軸の方向に伸ばして円にしたときの, 対応する点の原点からみた角度である. u を楕円の離心近点角という. 焦点を中心とした楕円の極座標表示

$$r = \frac{a}{1 + e \cos \theta}$$

との関係を調べる. 焦点の位置は $(ae, 0)$ であるので,

$$a \cos u = r \cos \theta + ae, \quad a\sqrt{1-e^2} \sin u = r \sin \theta$$

である。これより、

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{(a \cos u - ae)^2 + a^2(1 - e^2) \sin^2 u} \\ &= a \sqrt{\cos^2 u - 2e \cos u + e^2 + (1 - e^2) \sin^2 u} \\ &= a \sqrt{1 - 2e \cos u + e^2 \cos^2 u} = a(1 - e \cos u) \end{aligned}$$

となる。これは (5.2) と一致する。よって、ケプラー方程式の u は惑星の楕円軌道の離心近点角を表す。

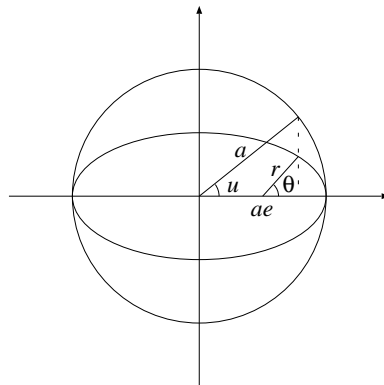


図 5.1

5.4 x, y の関数表示

前節より楕円 (5.5) 上を惑星は動くことがわかった。いま、太陽は原点ではなく $(ae, 0)$ にあることを注意。惑星の位置 (x, y) を t の関数として表示することを試みよう。

$x = a \cos u, y = a\sqrt{1 - e^2} \sin u$ であるから、 $\cos u, \sin u$ を t の関数として表示できれば良い。まず $\sin u$ を求めよう。(5.3), (5.4) より

$$\sin u = \frac{1}{e}(u - l) = \frac{2}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kl$$

となる。 $l = \pm \frac{\sqrt{-2E}}{a}(t - t_0)$ であったから、

$$y = a\sqrt{1 - e^2} \sin u = \pm \frac{2a\sqrt{1 - e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin \frac{k\sqrt{-2E}}{a}(t - t_0)$$

となり、これで y を t の関数として表示できた。

x の方はもうちょっと難しい。ケプラー方程式 $u - e \sin u = l$ を考えたとき、 e を固定して u を l の関数として考えてきた。もちろん e を変えると u の値も変わるので、ここでは e も変数とみなし、 u は e, l の 2 変数関数と考える。

ケプラー方程式を l で偏微分すると、

$$(1 - e \cos u) \frac{\partial u}{\partial l} = 1$$

となるので,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{1 - e \cos u}$$

が得られる. また, ケプラー方程式を e で偏微分すると,

$$\frac{\partial u}{\partial e} - \sin u - e \cos u \frac{\partial u}{\partial e} = 0$$

が得られ, (5.2) より

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\sin u}{1 - e \cos u} = \frac{a}{r} \sin u$$

が得られる. 一方, (5.4) を e で偏微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial e} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J'_k(ke) \sin kl$$

となる. よって,

$$\frac{a}{r} \sin u = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J'_k(ke) \sin kl$$

が得られた. e を固定し, この両辺を l で積分しよう. 右辺は

$$-2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J'_k(ke) \cos kl$$

となる (積分定数は左辺の方に付けるので省いている). 左辺は C を積分定数として

$$\int \frac{a}{r} \sin u dl = \int \frac{a}{r} \sin u \frac{dl}{du} du = \int \frac{a}{r} \sin u (1 - e \cos u) du = \int \sin u du = -\cos u + C$$

となり,

$$\cos u = C + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J'_k(ke) \cos kl$$

となる.

ここからは, e を定数とし, u は l を独立変数とする関数とする. 上の計算での $\frac{\partial u}{\partial l}$ は $\frac{du}{dl}$ となる. C は $\cos u$ のフーリエ級数の $\frac{a_0}{2}$ の部分であるから,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u dl = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u \frac{dl}{du} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u (1 - e \cos u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u - e \frac{1 + \cos 2u}{2} du = \frac{1}{2\pi} \left[\sin u - e \frac{2u + \sin 2u}{4} \right]_{u=-\pi}^{\pi} = -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\cos u = -\frac{e}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J'_k(ke) \cos kl$$

が得られた. 故に, 惑星の軌道の t による関数表示は

$$\begin{aligned} x &= a \cos u = -\frac{ae}{2} + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J'_k(ke) \cos \frac{k\sqrt{-2E}}{a} (t - t_0) \\ y &= a\sqrt{1 - e^2} \sin u = \pm \frac{2a\sqrt{1 - e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin \frac{k\sqrt{-2E}}{a} (t - t_0) \end{aligned}$$

となる。これは、楕円の中心を原点としたもので、太陽を原点とすると x が ae だけ平行移動されるので、

$$x = a \cos u - ae = -\frac{3ae}{2} + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J'_k(ke) \cos \frac{k\sqrt{-2E}}{a}(t - t_0)$$

$$y = a\sqrt{1 - e^2} \sin u = \pm \frac{2a\sqrt{1 - e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin \frac{k\sqrt{-2E}}{a}(t - t_0)$$

となる。

前章までの解法に比べるとかなり複雑になってしまった。前章までの解法では惑星の振る舞いはよく分かったのだが、実は惑星の位置 x, y を t の関数として明示的に表してはいなかったのである。今回は、ベッセル関数やフーリエ級数により t の関数として表示できた。しかし、この式から惑星の軌道を理解するのは相当難しいであろう。

このようなことは度々あって、例えば振り子の場合も同様で、エネルギー保存則から解の挙動はよく分かるが、質点の位置を t の関数として表示するには楕円関数という関数が必要になる ([10, 14] などを参照)。

可積分系と呼ばれる分野の研究対象の 1 つは、解の挙動がよく分かるような微分方程式について、解として定まる関数の表示や性質を詳しく調べることである。

5.5 解が代数関数でないことの証明

前節で、 $x(t), y(t)$ を表示しようとする非常に複雑になってしまったが、ここでは単純には表せないことを主張する 1 つの結果を紹介する。

x, y の多項式 $P(x, y)$ を用いて $P(x, y) = 0$ により表される曲線を代数曲線という。例えば、 $P(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とすると円が得られるので、円は代数曲線である。

ある多項式 $P(x, y)$ について、 $P(x, y) = 0$ を y について解いて表せる関数を代数関数という。 $P(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ を解いて $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ であるから、 $\sqrt{1 - x^2}$ や $-\sqrt{1 - x^2}$ は代数関数である。

平面上の領域が凸であるとは、その領域内の任意の 2 点を結んだ線分もその領域に含まれるときをいう (図 5.2)。代数曲線が卵形線であるとは、その曲線が閉曲線をなし、それ

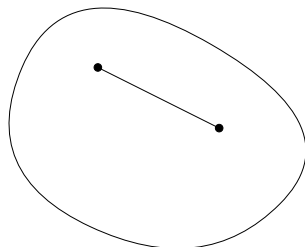


図 5.2 凸集合

により囲まれる領域が凸であるときをいう。

卵形線により囲まれる領域内に 1 点とそれを端点とする半直線を 2 つ取る。卵形線と

この2つの半直線により囲まれる領域を扇形という(図5.3). 扇形をなす半直線の式を

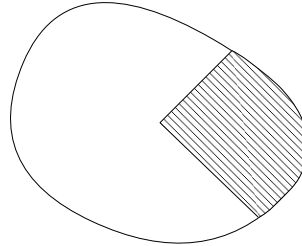


図5.3 扇形

$a_1x + b_1y = c_1, a_2x + b_2y = c_2$ としたとき扇形の面積を $S(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ とする. $S(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ が $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ を変数とみたときの代数関数になっているかどうかを調べよう.

定理 2. 滑らかな(尖った点がない)卵形線について $S(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ は代数関数ではない.

証明の概略. 卵形線の内部に原点が含まれるとする. $S(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ が代数関数であると仮定する. $y = 0$ と $sx - cy = 0 (s = \sin \theta, c = \cos \theta)$ によりできる扇形の面積 $\bar{S}(s) := S(0, s, 1, -c, 0, 0)$ は s, c の代数関数である. θ を0から増加させると 2π で \bar{S} は卵形線の面積に近づく. そのまま連続的になるように θ を増加すると 2π 増えるごとに卵形線の面積分が増加する. つまり, 1つの θ もしくは s, c に対し, \bar{S} は無限個の値が対応すると見れる. \bar{S} と s, c は

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N d_{lmn} \bar{S}^l s^m c^n = 0$$

という関係にあり, 一つの s, c を固定すると \bar{S} に関する多項式となり, 多項式の根は有限個だから矛盾する. \square

尖った点(特異点)のある代数曲線(例えば図5.4)では, 定理は一般的には成り立たない.

定理により次が示せる.

定理 3. ケプラー問題の解 $\mathbf{q}(t) = (x(t), y(t))$ の $x(t), y(t)$ は t の代数関数ではない.

証明. 前定理より, 楕円について $S(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ は代数関数ではない. 焦点を中心とし, 水平方向と傾き s の半直線からなる扇形の面積 $\bar{S}(s)$ も代数関数でない.

ケプラー問題の解について, ケプラーの第二法則より $\bar{S}(s)$ は時間 t の1次関数であるので, s は t の代数関数ではない. $y = sx (s = \tan \theta)$ と楕円の交点は代数的に求まるので, s の代数関数である. s は t の代数関数でないから, $x(t), y(t)$ も t の代数関数ではない. \square

この節の内容はニュートンにより調べられていたことである. 定数でない周期関数が代数関数ではないこと自体は容易に示せるので, 自明な結果であるとも言えるが, ニュートン

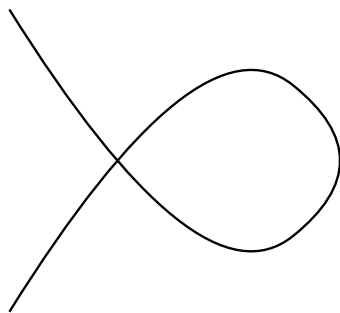


図 5.4 特異点がある卵形線

ンが力学の問題と絡めながら代数曲線や代数関数に関するこのような研究を進めていたことを知ってもらうためにここで紹介した。より詳しくは、[1]の第5章を参照されたい。

第 6 章

変分法による解法

6.1 変分問題

$\mathbf{q}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ を滑らかな曲線とし, $\mathbf{q}(t) \neq \mathbf{0}, \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(T)$ を満たすものとする.

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{q}}(t)|^2 + \frac{k}{|\mathbf{q}(t)|} dt$$

とおく. この \mathcal{A} を作用積分という. $\mathbf{q}(t)$ を少し変形したときの \mathcal{A} の値の変化を調べてみよう.

$\delta(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ も滑らかな*1曲線とし, $\delta(0) = \delta(T) = 0$ を満たすものとする*2. h を実数とし, $\mathbf{q}(t) + h\delta(t)$ を考えると, h が十分 0 に近いときこれは $\mathbf{q}(t)$ を少し変形した曲線を表す. \mathcal{A} の値を調べよう. そこで, $\mathcal{A}(\mathbf{q} + h\delta)$ を $h = 0$ において h で微分してみると,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dh} \mathcal{A}(\mathbf{q} + h\delta) \right|_{h=0} &= \left. \frac{d}{dh} \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{q}}(t) + h\dot{\delta}(t)|^2 + \frac{k}{|\mathbf{q}(t) + h\delta(t)|} dt \right|_{h=0} \\ &= \int_0^T \left. \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{q}}(t) + h\dot{\delta}(t)|^2 + \frac{k}{|\mathbf{q}(t) + h\delta(t)|} \right) \right|_{h=0} dt \end{aligned}$$

となる. ここで, 積分と微分の順序の交換を行ったが, この操作は滑らかな関数であれば可能である. 被積分関数の計算をさらに進めると,

$$\left. \frac{d}{dh} \mathcal{A}(\mathbf{q} + h\delta) \right|_{h=0} = \int_0^T \dot{\mathbf{q}}(t) \cdot \dot{\delta}(t) - \frac{k\mathbf{q}(t) \cdot \delta(t)}{|\mathbf{q}(t)|^3} dt$$

となる. 被積分関数の第一項に部分積分の公式を適用すると,

$$\left. \frac{d}{dh} \mathcal{A}(\mathbf{q} + h\delta) \right|_{h=0} = [\dot{\mathbf{q}}(t) \cdot \delta(t)]_0^T - \int_0^T \ddot{\mathbf{q}}(t) \cdot \delta(t) + \frac{k\mathbf{q}(t) \cdot \delta(t)}{|\mathbf{q}(t)|^3} dt$$

となり, $\delta(0) = \delta(T) = 0$ の仮定を適用すると,

$$\left. \frac{d}{dh} \mathcal{A}(\mathbf{q} + h\delta) \right|_{h=0} = - \int_0^T \left(\ddot{\mathbf{q}}(t) + \frac{k\mathbf{q}(t)}{|\mathbf{q}(t)|^3} \right) \cdot \delta(t) dt$$

*1 「滑らか」とは, いくらでも微分可能なことをいう.

*2 通常, 力学の運動方程式を変分問題として表す際は, 2 点 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ を固定し, $\mathbf{q}(0) = \mathbf{a}, \mathbf{q}(T) = \mathbf{b}$ を満たす曲線 $\mathbf{q}(t)$ について作用積分を考えるが, ここでは周期解を求めることを目的とするので周期的な境界条件にしている.

となる.

これより, $\mathbf{q}(t)$ がケプラー問題

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\frac{k\mathbf{q}(t)}{|\mathbf{q}(t)|^3}$$

の解であれば,

$$\left. \frac{d}{dh} \mathcal{A}(\mathbf{q} + h\boldsymbol{\delta}) \right|_{h=0} = 0 \quad (6.1)$$

となる. つまり, $\mathbf{q}(t)$ のところでの \mathcal{A} の変化率は 0 になる.

逆に, $\boldsymbol{\delta}(0) = \boldsymbol{\delta}(T) = 0$ となる任意の滑らかな $\boldsymbol{\delta}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対して (6.1) が成り立つとすると,

$$\int_0^T \left(\ddot{\mathbf{q}}(t) + \frac{k\mathbf{q}(t)}{|\mathbf{q}(t)|^3} \right) \cdot \boldsymbol{\delta}(t) dt = 0$$

となるから,

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \frac{k\mathbf{q}(t)}{|\mathbf{q}(t)|^3} = 0$$

が成り立つ (次の問題参照). つまり, $\mathbf{q}(t)$ はケプラー問題の解になる.

問題 10. $f(t)(t \in [a, b])$ を滑らかな関数とし, $g(a) = g(b) = 0$ となる任意の滑らかな関数 $g(t)(t \in [a, b])$ に対して,

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$$

が成り立つとする. このとき, 恒等的に $f(t) = 0$ となることを示せ.

おさらいすると, \mathcal{A} は各曲線 $\mathbf{q}(t)$ に対して数値を与える関数である. つまり, 曲線の集合を定義域とする関数である. 曲線の集合の次元は無限である. このように, 曲線や関数や写像の集合のような無限次元の集合を定義域とする関数を汎関数という. (6.1) は \mathbf{q} における $\boldsymbol{\delta}$ 方向への変動が 0 であることを意味する. つまり, 微分が 0 であるということに対応する. 実際, ここで定義した意味での \mathcal{A} の微分はガトー微分と呼ばれるものである. \mathbf{q} における \mathcal{A} の微分が任意の $\boldsymbol{\delta}$ に対して 0 になる $\mathbf{q}(t)$ を臨界点という. ケプラー問題の周期解は, \mathcal{A} の臨界点に対応する. このように, 汎関数の臨界点を求める問題を変分問題といい, 微分方程式を変分問題にして臨界点を求めるという観点から解を調べる方法を変分法という.

変分問題の例を 1 つ挙げておこう.

例 1. 鉛直下向きに重力が働いており, 2 点 $A = (0, 0), B = (a, b)(b < 0 < a)$ を固定し, 2 質点を曲線で結ぶ. 質点が A から初速度 0 で重力の影響により曲線に沿って動くとき, A から B へ達する時間が最短となる曲線を求めよという問題を考える. その求める曲線を最速降下曲線という.

A と B を結ぶ曲線が

$$f(x) < 0(x \in (0, a]), \quad f(0) = 0, \quad f(a) = b$$

を満たす曲線 $(x, f(x))$ で与えられたとき (図 6.1), まず, A から B に至るまで経過する時間が

$$T(f) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{2g(-f(x))}} dx$$

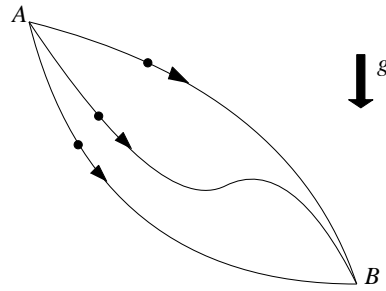


図 6.1 A と B を結ぶ曲線

で与えられることを示そう。

まずは、A から B まで曲線 $y = f(x)$ に沿って運動する質点の速度ベクトルは $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (\dot{x}(t), f'(x(t))\dot{x}(t))$ で、ポテンシャルエネルギーは $U = mgy(t) = mgf(x(t))$ となるから、全エネルギーは

$$E = \frac{m}{2}(1 + f'(x(t))^2) \left(\frac{dx}{dt}(t) \right)^2 + mgf(x(t)),$$

となる。エネルギー保存則よりこの E は一定である。条件 $f(0) = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ より E の値は 0 となり*3,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g(-f(x))}{1 + f'(x)^2}}$$

が得られる。これより、A から B に至るまで経過する時間は

$$T(f) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{2g(-f(x))}} dx$$

で与えられる。

この $T(f)$ は汎関数となっており、これを最小化する f が求めるものであるので、少なくとも T の臨界点にはなっていないといけない。 T に関して、ケプラー問題の作用積分の臨界点から運動方程式を導出したのと同様にすることで、微分方程式

$$2f \frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + 1 = 0 \quad (6.2)$$

が得られる*4。

$$\frac{d}{dx} \left(\left(\frac{df}{dx} \right)^2 f + f \right) = \left(2f \frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + 1 \right) \frac{df}{dx} = 0$$

が成り立つので、

$$\left(\frac{df}{dx} \right)^2 f + f$$

*3 $f'(0) = \infty$ の可能性も考えられるが、 $0 = \frac{dy}{dt}(0) = f'(0) \frac{dx}{dt}(0)$ より $E = 0$ である。

*4 一般に、ケプラー問題の場合も含めこのような汎関数の変分問題の臨界点であることはラグランジアンに対するオイラー-ラグランジュ方程式という微分方程式と同値になる。ケプラー問題の運動方程式や (6.2) はそれぞれのオイラー-ラグランジュ方程式に対応する。

が一定であることが分かる. この値を $C (< 0)$ とすると*5, $C \leq f \leq 0$ であるから, f の代わりに θ を未知変数とし,

$$f = \frac{C}{2}(1 - \cos \theta)$$

とおく. これを, $\left(\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + 1\right) f = C$ に代入すると,

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{dx}\right)^2 + 1\right) f &= C \\ \left(\left(\frac{C}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dx}\right)^2 + 1\right) \frac{C}{2}(1 - \cos \theta) &= C \end{aligned}$$

となるので, これから x と θ の関係を求めると

$$\frac{dx}{d\theta} = \pm \frac{C}{2}(1 - \cos \theta)$$

となり, 積分して

$$x = \pm \frac{C}{2}(\theta - \sin \theta) + C'$$

となる. $f = 0$ となるのは $\theta = 0$ でそのとき $x = 0$ でないといけないので $C' = 0$ である. また, x が θ の単調増加関数であるとする, \pm の取り方は $-$ である. よって, 求める曲線は

$$x = -\frac{C}{2}(\theta - \sin \theta), \quad f = \frac{C}{2}(1 - \cos \theta)$$

で与えられ, これはサイクロイド曲線と呼ばれる曲線である (図 6.2). なお, B を通るときの θ を θ_1 とすると

$$\frac{1 - \cos \theta_1}{\theta_1 - \sin \theta_1} = -\frac{b}{a} \quad (0 < \theta_1 < 2\pi)$$

となり, C は

$$C = -\frac{a}{\theta_1 - \sin \theta_1}$$

になる.

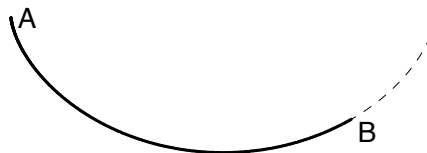


図 6.2 最速降下曲線 (点線はサイクロイド曲線)

*5 $f(0) = 0$ であるからという理由で, C を 0 であるとしてはいけない. $C = 0$ とすると解が存在しない. 実際, $C < 0$ で $x = 0$ のところでは $\frac{df}{dx}$ が発散することが分かる.

6.2 最小化法

ケプラー問題の周期解を求めることを変分問題の観点から試みてみよう。

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{q}}|^2 + \frac{k}{|\mathbf{q}|} dt$$

の臨界点を求めればよい。 $\mathcal{A} > 0$ であるから、 \mathcal{A} の最小点*6が存在することが期待される。

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ を固定し、 $\mathbf{q}(t)$ として恒等的に \mathbf{a} と等しくなるものをとる。すると、

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_0^T \frac{k}{|\mathbf{a}|} dt = \frac{kT}{|\mathbf{a}|}$$

となる。従って、このような \mathbf{q} で \mathcal{A} の値が小さいものを捉えようとする、 $|\mathbf{a}| \rightarrow \infty$ となって \mathbf{a} は無限の彼方に発散してしまう。そこで、そうならないように $\mathbf{q}(t) (t \in [0, T])$ として原点の周りを左回りに1周する曲線のみを考える。すると、 \mathcal{A} の値を最小にする $\mathbf{q}(t)$ の存在が示せ、それによりケプラー問題には周期解が存在することが分かる。その証明を厳密にするのは簡単ではなく、Gordon による1977年の論文 [5] で初めて達成された。

その証明はここでは省くがそれを理解するために必要になる理論だけ述べておこう。最小点の存在を示すには、曲線の集合という無限次元空間を厳密に扱う必要があり、そのような無限次元空間の理論を関数解析という。関数解析を基にして、汎関数の弱下半連続性あるいはパレ・スモール条件というものを確かめて存在を証明することになる。また、最小点の存在を示しても、それが衝突解になってしまう可能性があり、衝突の特異点の解析も必要になる。もし興味があれば、関数解析を勉強した後に、[12] などを読むと良い。

汎関数が下に有界であっても最小点が存在するとは限らないので、存在を示すには厳密な議論が必要になる。最小点が存在しない変分問題の例を挙げておく。

例 2.

$$\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1 \tag{6.3}$$

を満たす関数 $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$J(\varphi) = \int_0^1 (x\varphi'(x))^2 dx$$

と定める。汎関数 J は $J \geq 0$ を満たすので、最小点を持つと期待したくなる。

$\varepsilon > 0$ に対して、

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\arctan(x/\varepsilon)}{\arctan(1/\varepsilon)}$$

とする*7.

$$x\varphi'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\arctan(1/\varepsilon)} \frac{\varepsilon x}{x^2 + \varepsilon^2}$$

*6 ここで「点」といっても曲線の集合の中の点ということだから、各点の実体は1つの曲線である。

*7 \arctan は $\tan \theta (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ の逆関数

よって,

$$\begin{aligned}
 J(\varphi_\varepsilon) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\arctan(1/\varepsilon)} \frac{\varepsilon x}{x^2 + \varepsilon^2} \right)^2 dx \\
 &= \left(\frac{1}{\arctan(1/\varepsilon)} \right)^2 \int_0^1 \left(\frac{\varepsilon x}{x^2 + \varepsilon^2} \right)^2 dx \\
 &= \left(\frac{1}{\arctan(1/\varepsilon)} \right)^2 \int_0^{1/\varepsilon} \left(\frac{u}{u^2 + 1} \right)^2 \varepsilon du \\
 &= \varepsilon \left(\frac{1}{\arctan(1/\varepsilon)} \right)^2 \int_0^{1/\varepsilon} \frac{1}{u^2 + 1} - \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du \\
 &= \varepsilon \left(\frac{1}{\arctan(1/\varepsilon)} \right)^2 \int_0^{\arctan(1/\varepsilon)} \left(\frac{1}{\tan^2 \theta + 1} - \frac{1}{(\tan^2 \theta + 1)^2} \right) \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \varepsilon \left(\frac{1}{\arctan(1/\varepsilon)} \right)^2 \int_0^{\arctan(1/\varepsilon)} 1 - \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \varepsilon \left(\frac{1}{\arctan(1/\varepsilon)} \right)^2 \int_0^{\arctan(1/\varepsilon)} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= \varepsilon \left(\frac{1}{\arctan(1/\varepsilon)} \right)^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\arctan(1/\varepsilon)} \\
 &= \varepsilon \left(\frac{1}{\arctan(1/\varepsilon)} \right)^2 \left(\frac{\arctan(1/\varepsilon)}{2} - \frac{\sin(2 \arctan(1/\varepsilon))}{4} \right) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0)
 \end{aligned}$$

よって,

$$\inf_{\varphi} J(\varphi) = 0$$

である. 従って, φ が J の最小点なら $J(\varphi) = 0$ となるはずである. しかし, $J(\varphi) = 0$ とすると, $\varphi' \equiv 0$. よって, φ は一定. しかし, それでは境界条件 (6.3) を満たさない. 故に, 汎関数 J の最小点は存在しない.

6.3 舞踏解 (コレオグラフィ)

ケプラー問題は太陽からの引力のもとでの惑星の運動を調べる問題であった. より複雑な問題として, n 個の質点が万有引力の法則に従って互いに引き合うときの運動を調べる問題を n 体問題という.

n 体問題の運動方程式は

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{q}_k}{dt^2} = - \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{|\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j|^3} (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j) \quad (k = 1, \dots, n)$$

と, 複雑になり $n \geq 3$ であれば解くことができないし, 実際カオスと呼ばれる複雑な挙動を示す (図 6.3).

しかし, すべての解が複雑なわけではなく, 非常に単純な解も中には存在する. 特に周期的な振る舞いをする解である周期解がそのような例である. 古典的に知られている 3 体問題の周期解にオイラー解 (図 6.6) とラグランジュ解 (図 6.7) がある. オイラー解は任意の質量に対して存在し, 3 質点は常に同一直線上にあり, (質量と配置の順番により決まる) 内分比を常に保つ. ラグランジュ解は 3 質点が常に正三角形をなす解であり, これも任意の質量で存在する. これらは, 決まった配置を相似的に保つもので, このような解は

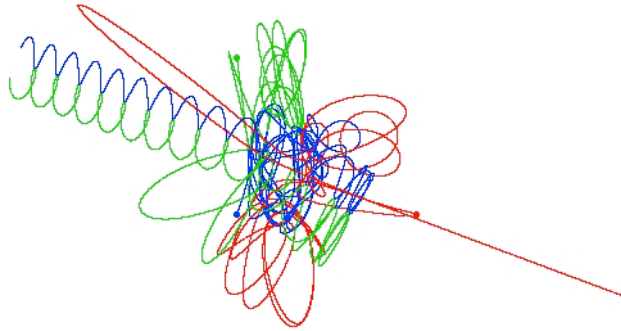


図 6.3 3 体問題の 1 つの解をコンピュータで近似的に計算したもの

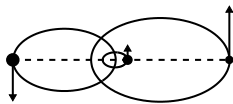


図 6.4 オイラー解

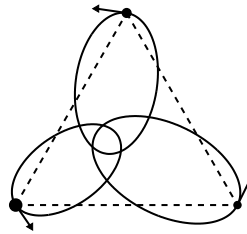


図 6.5 ラグランジュ解

4 体以上の n 体問題では多く存在することが知られている。そのような解を求めるのは難しい代数方程式の解を求めることになり、どのような配置が可能なのか、どのくらいの種類そのような解が存在するのかといった問題は現在も研究されている。

では、相似的でないが単純な解を求めるという問題が考えられ、そこで変分法が有効になる。ケプラー問題の場合は変分法により周期解が存在することを示すのは却って困難であるが、3 体以上の n 体問題では変分法を用いないと見出せない周期解が多く知られている。

変分法により求めた解として、3 体問題の 8 の字解 [3] や 4 体問題の超 8 の字解 [11] がある。これらは、自己相似的ではないが、特別な性質として 1 つの曲線上を質点が追跡

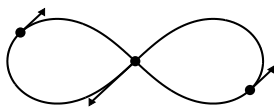


図 6.6 8 の字解

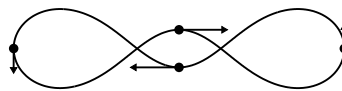


図 6.7 超 8 の字解

し合うように運動するというのがある。そのような解を舞踏解 (コレオグラフィー) という。変分法によりこのような解が求まるようになったのは、2000 年に 8 の字解が求まったからである。その後変分法により多くの周期解が求まっている。

第 7 章

発展

7.1 3 体問題の非可積分性

2 体問題は解けるが 3 体問題は解けないという話は有名である。ここでは、それを簡単に説明する。詳しくは [10] を参照されたい。

まず、2 体問題が解けることを確認しておこう。2 体問題の運動方程式は

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{dt^2} &= -\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{q}_2}{dt^2} &= -\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1|^3} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{Q}_2 = m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2$$

とおくと、

$$\frac{d^2 \mathbf{Q}_1}{dt^2} = -\frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{Q}_1|^3} \mathbf{Q}_1, \quad \frac{d^2 \mathbf{Q}_2}{dt^2} = \mathbf{0}$$

となる。 \mathbf{Q}_1 に関する方程式はケプラー問題であり、 \mathbf{Q}_2 の解は簡単に t の一次関数であることがわかるので、これを $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ に戻すことで 2 体問題が解ける。

では、3 体問題はどうかということを考えてみよう。まず、解けるということはどういうことかということを考えなければならない。第 2 章では第一積分を活用して解いたし、他の章の解法でもいくつかの第一積分は不可欠であった。一般に十分な数の第一積分が存在すれば、微分方程式は解ける。その必要な個数は、微分方程式の次元で決まる。その結果を精密に述べたものを、リウヴィル-アーノルドの定理といい、その意味で解ける微分方程式は可積分であるという*1。

ケプラー問題が解けるのは、その必要数だけ第一積分が存在するからであると言える。2 体問題はより多くの第一積分が必要になるが、 $\dot{\mathbf{Q}}_2$ (正確には、 \mathbf{Q}_2 に共役な運動量ベクトル) の各成分が新たな第一積分であるので可積分である。3 体問題が解けないと言われるのは、3 体問題が非可積分であることによる。つまり、可積分になるために必要な数の第一積分が存在しない。3 体問題にはいくつかの第一積分があるが、可積分になるには足りない。

*1 厳密には、力学の運動方程式 (より一般にはハミルトン系) において、自由度 (位置を表す空間の次元) と同じ個数の第一積分が互いに独立な関数で、互いのポアソン括弧 (定義は省く) が恒等的に 0 となるとき、可積分系であるという。

このことを示した歴史的に有名な結果はポアンカレによる定理である*2。3体問題は3つの質量のうち2つの質量を0にすると2つのケプラー問題を考えることになり可積分である。そこで、0にした質量のうち1つを正の値 $\mu > 0$ とし、もう一つは0のままとする。ポアンカレが示したのは、任意の $\mu > 0$ で第一積分 Φ_μ が存在すると、 Φ_μ はエネルギーと本質的に同じ第一積分でしかないということである。

近年は微分ガロア理論*3を適用して様々微分方程式が非可積分であることが示されている。3体問題についても、ポアンカレの定理のように特殊な状況でなく、任意に固定した質量に対して非可積分性が証明されている。

7.2 太陽系

太陽系における惑星の運動を考えよう。太陽が原点にあり、 N 個の惑星が太陽からの万有引力の元で運動ををするとする。太陽の質量を m_0 、惑星の質量を m_1, \dots, m_N とすると惑星の運動方程式は

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{dt^2} &= - \frac{Gm_0 m_1}{|\mathbf{q}_1|^3} \mathbf{q}_1 \\ &\vdots \\ m_N \frac{d^2 \mathbf{q}_N}{dt^2} &= - \frac{Gm_0 m_N}{|\mathbf{q}_N|^3} \mathbf{q}_N \end{aligned}$$

となる。この方程式は各々がケプラー問題であるから、解くことができ、有界な軌道としては各々が周期解になっている。

この運動方程式は惑星が太陽からのみ引力を受けているという設定で建てられているが、より精密な運動を調べるには惑星間の引力を考慮に入れる必要がある。運動方程式は

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{dt^2} &= - \frac{Gm_0 m_1}{|\mathbf{q}_1|^3} \mathbf{q}_1 + \mu_1 f_1(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \\ &\vdots \\ m_N \frac{d^2 \mathbf{q}_N}{dt^2} &= - \frac{Gm_0 m_N}{|\mathbf{q}_N|^3} \mathbf{q}_N + \mu_N f_N(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \end{aligned}$$

のような形になる。 μ_1, \dots, μ_N は0に近い数であり、 f_k は \mathbf{q}_k が他の惑星から受ける引力を全て足したものである。

これは、非常に複雑な方程式であり、解くことが困難になる。しかし、 μ_1, \dots, μ_N が非常に0に近ければ、解もあまり変わらないであろうという期待もできるので、各惑星の軌道はやはり周期解のままであろうとも予想できる。実際の太陽系の運動を考えると、そうなっているとも考えられる。そのことを厳密に証明するには、KAM理論と呼ばれる摂動論を用いる。摂動論の歴史は古いが、太陽系モデルでそのことが証明されたのは、2000年代に入ってからである。詳しくは、[10] やそれに載っている文献を参照されたい。

*2 そのちょっと前に示されたブルンスの定理という非可積分性を示唆する別の結果もあるが、ここでは述べない。

*3 ガロア理論というのは代数の理論で、これを使うことで代数方程式が解けないことを示すことができる。その微分方程式版を微分ガロア理論という

7.3 ロケット軌道の設計

ロケットは目的地への軌道によりコストが大きく変わるのでうまく設計することが重要である。ロケットの噴射による加速の大きさは限られているし、コストもかかるので、天体からの重力の効果を考慮して、あるいはそれをうまく利用して、設計すると効果的である。

■ホーマン軌道 ロケットが地球近くを周回している状態から、月に近い円運動に到達する軌道を考えよう。ここで、簡単のため、ロケットは地球からのみ引力を受けるとし、太陽や月などからの引力は無視する*4。

最初、ロケットが地球の重心を中心した半径 a_1 の円軌道を描いているとし、月の軌道を半径 a_2 の円軌道とし、その軌道を目指すとする。地球周回軌道のとき円軌道と仮定しているので、速度の大きさ v_1 は一定である。そこで、ある時点で δ_1 だけ加速する。そうすると、円軌道が楕円軌道に変わる。

δ_1 が大きいほど楕円の長軸の長さが大きくなる。そこで、その楕円がちょうど半径 a_2 の円軌道に接するように δ_1 をとる。そのままだと、楕円に沿って元の位置に戻るのですが、半径 a_2 の円に接したときにその円軌道を描くような加速 δ_2 をする (図 7.1)。それにより、

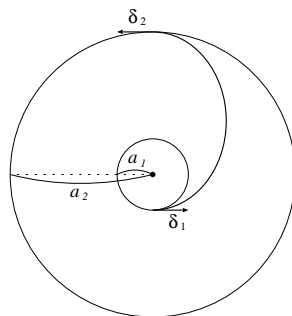


図 7.1

目的の軌道にロケットを投入できる。この軌道をホーマン軌道という。

この円軌道から円軌道に楕円に沿って移る軌道であれば、噴射による加速ベクトルが必ずしも円に接しなくても、いろいろなものが考えられる。半径 a_1 の円周上の軌道の際に、ある瞬間の速度 v_1 に必ずしもその円に接しないベクトル w_1 だけ加速すると速度ベクトルは $v_1 + w_1$ となり、それから描く楕円軌道が半径 a_2 の円と交わるとする。そして、交わった際の速度ベクトルを v_2 とし、 $v_2 + w_2$ が円軌道の速度ベクトルになるようにベクトル w_2 だけ加速する、ということがより一般的な軌道設計として考えられる (図 7.2)。

加速する際に燃料が使われるわけだから $|w_1| + |w_2|$ を最小にする軌道が最も良いと考えられる。実際は、これが最小になる軌道は、ホーマン軌道つまり w_1 と w_2 が円軌道に接するときであることが証明できる。この意味で、ホーマン軌道は非常に優れたものであることがわかる。詳しくは、[6]などを参照。

*4 実際にはそのような引力も考慮の上設計されている。

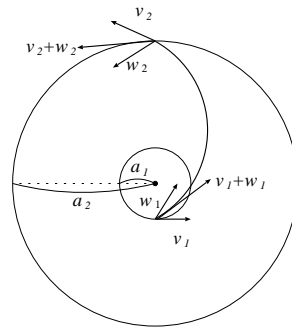


図 7.2

■フライバイ 1つの惑星から引力を受けるロケットの運動はケプラー問題に従う。まず、惑星は原点に静止していると考え、エネルギーが正であれば、双曲線を描くのであった。惑星に近づく前と、惑星に接近した後遠ざかった後の速度は、大きさは変わらず向きが変化したと考えることができる。最接近したときの時間を $t = 0$ とする。 $t = \pm T$ のときの速度を \mathbf{v}_{\pm} とすると $|\mathbf{v}_{+}| = |\mathbf{v}_{-}|$ が成り立つ。 \mathbf{v}_{+} と \mathbf{v}_{-} の角を θ とし、

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

とすると $\mathbf{v}_{+} = R(\theta)\mathbf{v}_{-}$ となる (図 7.3)。

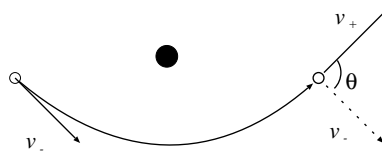


図 7.3

惑星は実際は運動をしているから、太陽が原点に静止している座標系で考える。ロケットが惑星の後ろから近づくとする。ロケットが最接近したときの惑星の速度が \mathbf{V} であるとし、ロケットが \mathbf{w}_{-} で近づくとし、接近後の速度を \mathbf{w}_{+} とする (図 7.4)。惑星から見た

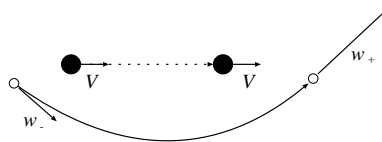


図 7.4

速度は $\mathbf{w}_{-} - \mathbf{V}$ と $\mathbf{w}_{+} - \mathbf{V}$ であるから $\mathbf{w}_{+} - \mathbf{V} = R(\theta)(\mathbf{w}_{-} - \mathbf{V})$ が成り立つ。よって、

$$\mathbf{w}_{+} = (I_2 - R(\theta))\mathbf{V} + R(\theta)\mathbf{w}_{-}$$

となる。ここで、 I_2 は 2 次の単位行列である。これにより、燃料を使うことなく加速 (減速も) することができる。このように惑星などの重力により加速する方法をフライバイあるいはスイングバイという。現在のロケットの軌道設計では、フライバイを何度も繰り返して地球からはるか遠方の惑星などに向かうように設計されている。

第 8 章

極座標と合わせて解く

ここでは、あえて未知関数を 1 つ増やして解くという解法を紹介する。平面の Kepler 問題を考える：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

極座標 $(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$ を使うと

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{r^2}, \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

となる。第二式は

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

と同値だから $r^2\dot{\theta}$ は定数である。その定数を C とおく。 C を使うと第一式は

$$\ddot{r} = -\frac{k}{r^2} + \frac{C^2}{r^3}$$

となる。

さて、元の微分方程式とこの式を合わせて考えると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{kx}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{ky}{r^3} \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{k}{r^2} + \frac{C^2}{r^3} \end{aligned}$$

となる。この方程式を解くことを考えよう。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ r \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{u} + \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C^2 \end{pmatrix}$$

と表される。ベクトルについている r^{-3} は既知関数とみなすとこれは \mathbf{u} に関する変数係

数の線形微分方程式である。これは、特解 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{C^2}{k} \end{pmatrix}$ を持ち、一般解はこの特解と齊

次方程式 $\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = -\frac{k}{r^3} \mathbf{u}$ の和で表される。この斉次方程式について、(原点を通る) 任意の 2次元部分線形空間は不変である。特に、初期条件 $\mathbf{u}(0), \dot{\mathbf{u}}(0)$ を含む平面に $\mathbf{u}(t)$ は属する。この平面が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ で張られるとしよう*1。すると、斉次方程式の解は

$$\alpha(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \beta(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

と表され、よって \mathbf{u} は

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{C^2}{k} \end{pmatrix} + \alpha(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \beta(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

と表される。第一成分、第二成分を比べることで、 $x(t) = \alpha(t), y(t) = \beta(t)$ が得られる。よって、

$$r(t) = \frac{C^2}{k} + ax(t) + by(t)$$

である。 $r(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}$ であるから

$$\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} = \frac{C^2}{k} + ax(t) + by(t)$$

となり、これにより軌道が円錐曲線を描くことがわかる。

*1 このようなベクトルで張れない場合や $\mathbf{u}(0), \dot{\mathbf{u}}(0)$ が一次従属になる場合は解が直線解になるような特殊な場合なのでここでは考えない。

参考文献

- [1] アーノルド, 数理解析のパイオニアたち (蟹江幸博訳), シュプリンガー・フェアラーク東京 (1999).
- [2] アーノルド, 古典力学の数学的方法 (安藤韶一, 蟹江幸博, 丹羽敏雄訳), 岩波書店 (1980).
- [3] A. Chenciner and R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Ann. Math.* **152**(2000), 881-901.
- [4] 深谷賢治, 双曲幾何, 岩波書店 (2004)
- [5] W. B.Gordon, A minimizing property of Keplerian orbits, *Amer. J. Math.* **99** (1977), 961-971.
- [6] 木下宙, 天体と軌道の力学, 東京大学出版会 (1998).
- [7] 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房 (1995)
- [8] J. Milnor, On the geometry of the Kepler problem, *Amer. Math. Monthly*, **90** (1983), 353-365.
- [9] 志賀浩二, 数学の流れ 30 講 (上・中・下), 朝倉書店 (2007).
- [10] 柴山允瑠, ハミルトン力学系, サイエンス社 (2016).
- [11] M. Shibayama, Variational proof of the existence of the super-eight orbit in the four-body problem, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **214**(2014), 77-98
- [12] 田中和永, 変分問題入門, 岩波書店 (2008)
- [13] 戸田盛和, 一般力学 30 講, 朝倉書店 (1994)
- [14] 戸田盛和, 楕円関数入門, 日本評論社 (2001)
- [15] 吉田春夫, 力学の解ける問題と解けない問題, 岩波書店 (2005)